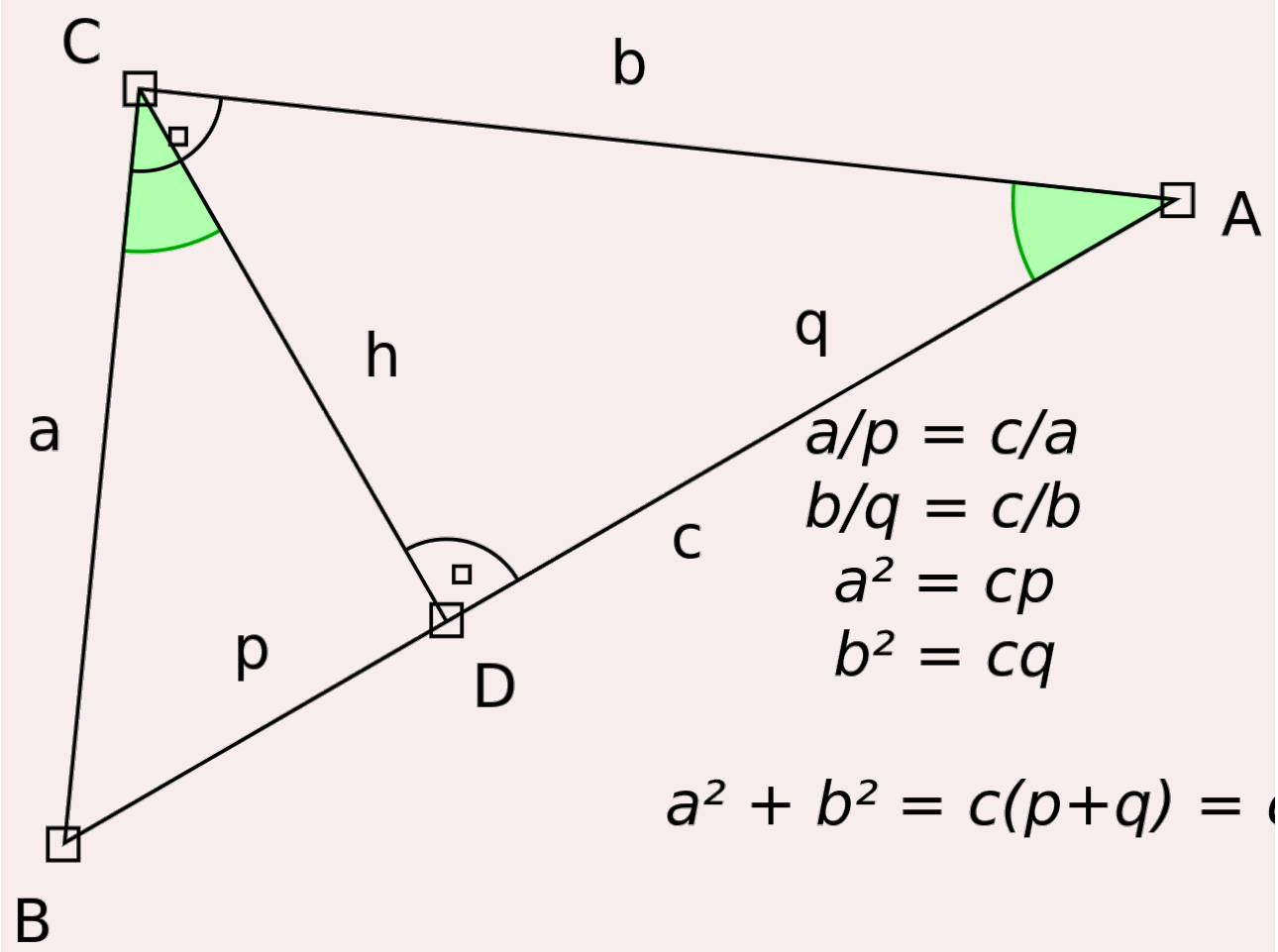
MATEMATICA
V GINNASIO



WIKIPEDIA
L'enciclopedia libera

CC BY SA

NOTE GENERALI SUL PROGETTO “LIBRI DI TESTO”

Questo è un progetto che avevo in mente di attuare da tempo: provare ad usare il materiale presente su Wikipedia e progetti correlati per creare dei libri di testo liberi per le scuole; tuttavia, a seguito di una discussione che ho intrapreso con altri utenti nel bar di Wikipedia è emerso che a quanto ho capito non esiste più un vero e proprio "programma ministeriale" per le scuole superiori. Ho capito inoltre che oggigiorno ogni scuola va abbastanza per conto suo nella definizione dei programmi di corso, motivo per cui è praticamente impossibile creare dei testi "standard" validi ovunque (e ci sarebbe da chiedersi perchè questa grande "libertà" è spesso correlata ai testi iperspecifici per ogni classe che i docenti adottano per i loro corsi... testi di cui spesso sono anche autori! :D). A questo problema si aggiunge il già citato iperspecialismo di volte voci che in molti casi può dare problemi ed il fatto che i testi sono spesso strutturati da un punto di vista più "didattico".
Ad ogni modo ho deciso comunque di proseguire il progetto per una serie di ragioni che illustro qui sotto, creando solo i testi del Liceo Classico da utilizzare come esempio pratico:

•fornire dei testi utilizzabili in quei contesti ove i testi "ufficiali" siano troppo costosi (es. terzo mondo)
•dimostrare la fattibilità del progetto a grandi linee
•fornire una critica all'attuale sistema di creazione dei programmi di corso e dei libri di testo scolastici. Davvero la "libertà editoriale" come è propagandata oggi tutela gli studenti e le famiglie? (Non dico che bisogna tornare al "testo unico" del ventennio, ma sarebbe interessante quantomeno studiare i conflitti di interesse nella creazione e nell'utilizzo dei testi)
•mostrare come la "massa" possa autogestire la creazione dei testi scolastici indipendentemente dagli editori e fornendo testi di qualità e gratuiti, oltre che più aderenti ad un punto di vista neutrale.
Per vari testi liberi relativi alla Letteratura Italiana, antica e straniera per tutti gli anni del corso si rimanda al progetto WikiSource o ad archive.org.

Galati Antonello

WIKIPEDIA

Scomposizione dei polinomi

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

In matematica, l'espressione **scomposizione di un polinomio in fattori**, anche chiamata **fattorizzazione di un polinomio**, significa esprimere un dato polinomio come prodotto di due o più fattori polinomiali di grado inferiore. Ci sono alcuni polinomi che non possono essere espressi come il prodotto di polinomi di grado inferiore e sono detti polinomi irriducibili. La scomposizione dei polinomi è utile nelle operazioni con le frazioni algebriche[1].

Indice

Metodi di scomposizione
- Raccoglimento a fattore comune
- Prodotti notevoli
- Trinomi particolari di secondo grado
- Trinomi notevoli
- Regola di Ruffini
- Riassunto delle scomposizioni riconducibili a prodotti notevoli
- Caso particolare di polinomio con n multiplo di 4

Note

Bibliografia

Voci correlate

Collegamenti esterni

Metodi di scomposizione

Raccoglimento a fattore comune

🔎 *Lo stesso argomento in dettaglio:* ***Raccoglimento a fattor comune****.*

Significa mettere in evidenza dei numeri, delle lettere o entrambi che dividano tutti o alcuni degli elementi del polinomio. Se il fattore evidenziato divide tutti gli elementi si avrà un raccoglimento totale, se invece il fattore è comune solo ad alcuni, il raccoglimento sarà parziale[2].

Un esempio di raccoglimento totale è:

$$AB + AC + AD = A(B + C + D).$$

In caso in cui ci siano numeri si calcola il massimo comune divisore. Per esempio:

$$3AB + 9AC = 3A(B + 3C).$$

Un esempio di raccoglimento parziale può essere:

$$AB + AC + B^2 + BC = A(B + C) + B(B + C).$$

In questo caso, il risultato ottenuto presenta anch'esso un fattore comune (il binomio $B + C$), e quindi si può procedere a un'ulteriore scomposizione dell'espressione ottenuta:

$$A(B + C) + B(B + C) = (B + C)(A + B).$$

Prodotti notevoli

🔎 *Lo stesso argomento in dettaglio:* ***Prodotti notevoli****.*

Alcuni polinomi sono il risultato di particolari moltiplicazioni o di elevamenti a potenza di binomi o altri polinomi (prodotti notevoli). Conoscendo in anticipo questi prodotti, è possibile, applicando a ritroso i passaggi, risalire con facilità ai fattori che li compongono.

Alcuni esempi di prodotti notevoli possono essere[3]:

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2.$$

Da notare attentamente la differenza di segni, in quanto le due espressioni non sono identiche bensì differiscono per il segno comportando una forma scomposta non identica.

Trinomi particolari di secondo grado

I trinomi di secondo grado si dicono *particolari* (o caratteristici) quando sono espressi nella forma[4]:

$$x^2 + sx + p$$

nel quale:

- il coefficiente di x^2 è 1;
- s e p sono due numeri reali che esprimono rispettivamente la somma e il prodotto delle due radici x_1 e x_2 del trinomio.

Una volta trovati (se esistono) i due numeri x_1 e x_2 tali che $x_1 + x_2 = s$ e $x_1 \cdot x_2 = p$, il trinomio è scomponibile nella forma:

$$x^2 + sx + p = (x + x_1)(x + x_2)$$

Ad esempio:

$$x^2 + 5x - 6$$
$$s = 5 = 6 - 1$$
$$p = -6 = 6 \cdot (-1).$$

È quindi possibile scomporre il trinomio di secondo grado in questo modo:

$$x^2 + 5x - 6 = (x - 1)(x + 6).$$

In generale si avrà che:

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b).$$

Trinomi notevoli

🔎 *Lo stesso argomento in dettaglio:* ***Trinomio notevole***.

I trinomi di secondo grado sono del tipo:

$$ax^2 + bx + c, \quad (a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$$

Se il discriminante del trinomio è positivo o nullo ($\Delta \geq 0$), allora il trinomio può essere scomposto come[5]:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

dove x_1 e x_2 sono le soluzioni dell'equazione di secondo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Regola di Ruffini

🔎 *Lo stesso argomento in dettaglio:* ***Regola di Ruffini***.

Dato un generico polinomio $P(x)$, ad esempio $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$, se si riesce a trovare un numero a tale che $P(a) = 0$, allora il polinomio $P(x)$ è divisibile per il binomio di primo grado $(x - a)$, quindi applicando la regola della divisione secondo il teorema del resto si ottiene il polinomio quoziente $Q(X)$, il polinomio iniziale $P(x)$ può quindi essere scomposto come[6]:

$$P(x) = (x - a)Q(x),$$

nel caso in cui si possano ottenere tanti numeri (a, b, c) che annullino il polinomio quanto è il grado del polinomio dato, si avrà:

$$P(x) = (x - a)(x - b)(x - c),$$

Nel polinomio in esempio $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ si considerino i numeri ottenuti come rapporto tra i divisori del termine noto ed i divisori del coefficiente del termine di grado massimo (per il teorema delle radici razionali), nel nostro caso i numeri $+1, -1, +2, -2,$ si trova che $P(1) = 0$, $P(-1) = 0$ e $P(-2) = 0$, quindi si potrà scrivere:

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x + 1)(x + 2).$$

Anche se è -2 a rendere nullo il polinomio, si ricordi che nell'espressione generale il termine a compare in $(x - a)$ anteposto da un segno meno, e quindi comporta il cambio di segno di quest'ultimo.

Di seguito un altro esempio: si consideri il polinomio $P(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 3$; per questo polinomio sarà $P(1) = 0$. Dato che non è possibile trovare altri numeri per i quali si annulla il polinomio, si dovrà procedere con la divisione mediante la regola di Ruffini; quindi sarà:

$$Q(x) = x^2 - x + 3$$

allora il polinomio si potrà così scomporre:

$$x^3 - 2x^2 + 4x - 3 = (x - 1)(x^2 - x + 3).$$

Riassunto delle scomposizioni riconducibili a prodotti notevoli

🔎 *Lo stesso argomento in dettaglio:* ***Prodotti notevoli****.*

Ecco uno schema riassuntivo di tutte le scomposizioni riconducibili a prodotti notevoli[7]:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b);$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2;$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2;$$
$$a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc = (a - b + c)^2;$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a + b + c)^2;$$
$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3;$$
$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3.$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Caso particolare di polinomio con n multiplo di 4

Sia $(x^n + t)$ con $n, t \in N$ tali che n multiplo di 4 e $\sqrt{2 \cdot \sqrt{t}} \in N$ allora risulta la seguente uguaglianza:

$$(x^n + t) = (x^{n/2} + x^{n/4} \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{t}} + \sqrt{t}) \cdot (x^{n/2} - x^{n/4} \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{t}} + \sqrt{t})$$

Esempio:

$$(x^4 + 4) = (x^2 + 2x + 2) \cdot (x^2 - 2x + 2)$$

Note

1. ^ Massimo Bergamini, Graziella Barozzi, Anna Trifone, *Matematica.blu (seconda edizione) Vol.1*, Zanichelli - Bologna, 2018, ISBN 978-88-08-22085-1. p.416
2. ^ Massimo Bergamini, Graziella Barozzi, Anna Trifone, *Matematica.blu (seconda edizione) Vol.1*, Zanichelli - Bologna, 2018, ISBN 978-88-08-22085-1. p.417
3. ^ Marzia Re Fraschini, Gabriella Grazzi, *I principi della matematica (Volume 3)*, Atlas, 2012, ISBN 978-88-268-1711-8. p.16
4. ^ Marzia Re Fraschini, Gabriella Grazzi, *I principi della matematica (Volume 3)*, Atlas, 2012, ISBN 978-88-268-1711-8. p.17

5. ^ Massimo Bergamini, Anna Trifone, Graziella Barozzi, *Matematica.Blu-Volume 2*, Zanichelli, 2010, ISBN 978-88-08-31344-7. p.876
6. ^ Marzia Re Fraschini, Gabriella Grazzi, *I principi della matematica (Volume 3)*, Atlas, 2012, ISBN 978-88-268-1711-8. pp.19-24
7. ^ Massimo Bergamini, Graziella Barozzi, Anna Trifone, *Matematica.blu (seconda edizione) Vol.1*, Zanichelli - Bologna, 2018, ISBN 978-88-08-22085-1.p.418

Bibliografia

- Massimo Bergamini, Graziella Barozzi, Anna Trifone, *Matematica.blu (seconda edizione) Vol.1*, Bologna, Zanichelli, 2018, ISBN 978-88-08-22085-1.
- Marzia Re Fraschini, Gabriella Grazzi, *I principi della matematica (Volume 3)*, Atlas, 2012, ISBN 978-88-268-1711-8.

Voci correlate

- Fattorizzazione
- Frazione algebrica
- Fattore terminale

Collegamenti esterni

- Spiegazione del significato geometrico della scomposizione dei polinomi (http://rubiconrivergame.com/prodotti-notevoli-scomposizione-polinomi).

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Scomposizione_dei_polinomi&oldid=121750721"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 9 lug 2021 alle 09:29.

Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

WIKIPEDIA

Raccoglimento a fattor comune

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

Il **raccoglimento a fattor comune** è un'operazione matematica che consente di mettere in evidenza una parte letterale e/o una parte numerica che moltiplica tutto ciò che la segue, e si basa sulla proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione[1]. Si divide in raccoglimento totale e raccoglimento parziale.

Il raccoglimento totale è la più semplice operazione di scomposizione di un polinomio in fattori, che consiste nell'individuare, se esiste, il monomio massimo comun divisore[2]; per esempio: $AB + AC = A(B + C)$.

Il raccoglimento parziale si ha quando non tutti i termini di un polinomio hanno dei fattori comuni, ma solo alcuni di essi[3]; si procede quindi prima con un raccoglimento *parziale* raggruppando le parti in comune. La procedura è finalizzata nell'evidenziare, dopo questo primo passaggio, una parte che in un secondo tempo può essere raccolta totalmente. Per esempio, si consideri il seguente polinomio: $ax + bx + ay + by$.

I primi due termini hanno in comune un termine x, il terzo e il quarto un termine y; procedendo col raccoglimento, si ottiene:

$$x(a + b) + y(a + b) = (x + y)(a + b).$$

Nell'ultimo passaggio, dato che sia la x che la y sono moltiplicate per il fattore $a + b$, si può raccogliere quest'ultimo e si ottiene il prodotto $(x + y)(a + b)$.

Indice

Utilità

Note

Bibliografia

Voci correlate

Utilità

L'operazione di raccoglimento a fattor comune è particolarmente utile perché consente di semplificare anche di molto dei polinomi che, se non ridotti a una forma più *accessibile*, risulterebbero molto difficili da trattare.

- Si consideri come esempio il binomio:

$$2x^3 + 10x^2.$$

Qualora si volesse trovarne gli zeri (o discuterne il segno), è possibile raccogliere a fattor comune il massimo comun divisore tra i monomi che compongono il binomio; a esempio:

$$2x^3 + 10x^2 = 0 \ \rightarrow \ 2x^2(x+5) = 0.$$

Per la legge di annullamento del prodotto, l'equazione è soddisfatta per $x = 0 \ \vee \ x = -5$.

- Analogamente è possibile fare uso del raccoglimento a fattor comune per semplificare le frazioni:

riprendendo in parte l'esempio precedente e considerando la frazione:

$$\frac{2x^3 + 10x^2}{x^3 + 5x^2 + x + 5},$$

si può procedere col raccoglimento totale a numeratore (visto prima) e con un raccoglimento prima parziale e poi totale a denominatore:

$$\frac{2x^2(x+5)}{x^2(x+5) + x + 5} = \frac{2x^2(x+5)}{(x+5)(x^2+1)}.$$

È ora possibile semplificare sia a numeratore che a denominatore il fattore $(x+5)$, a patto però di calcolare prima il campo di esistenza, ponendo $x + 5 \neq 0 \implies x \neq -5$:

$$\frac{2x^2(x+5)}{(x+5)(x^2+1)} = \frac{2x^2}{x^2+1}.$$

Note

1. ^ Massimo Bergamini, Graziella Barozzi, Anna Trifone, *Matematica.blu (seconda edizione) Vol.1*, Zanichelli - Bologna, 2018, ISBN 978-88-08-22085-1. p.417
2. ^ Marzia Re Fraschini, Gabriella Grazzi, *I principi della matematica (Volume 3)*, Atlas, 2012, ISBN 978-88-268-1711-8. p.11
3. ^ Marzia Re Fraschini, Gabriella Grazzi, *I principi della matematica (Volume 3)*, Atlas, 2012, ISBN 978-88-268-1711-8. p.12

Bibliografia

- Massimo Bergamini, Graziella Barozzi, Anna Trifone, *Matematica.blu (seconda edizione) Vol.1*, Zanichelli - Bologna, 2018, ISBN 978-88-08-22085-1.
- Marzia Re Fraschini, Gabriella Grazzi, *I principi della matematica (Volume 3)*, Atlas, 2012, ISBN 978-88-268-1711-8.

Voci correlate

- Regola di Ruffini
- Polinomi
- Equazione

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Raccoglimento_a_fattor_comune&oldid=132553658"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 17 mar 2023 alle 20:57.

Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

WIKIPEDIA

Regola di Ruffini

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

> **Questa voce o sezione sull'argomento matematica non cita le fonti necessarie o quelle presenti sono insufficienti**.

In algebra lineare, la **regola di Ruffini** permette di dividere velocemente un qualunque polinomio per un binomio di primo grado della forma $x - a$. Tale regola è stata descritta da Paolo Ruffini nel 1809 ed è un caso speciale della divisione polinomiale quando il divisore è un fattore lineare. La regola di Ruffini è anche nota come **divisione sintetica**[1].

Indice

- L'algoritmo
- Usi della regola
  - Divisione polinomiale per $x - r$
  - Divisione polinomiale per $ax - k$
  - Trovare le radici di un polinomio
  - Fattorizzazione polinomiale
    - Primo esempio: nessun resto
    - Secondo esempio: con resto
- Note
- Bibliografia
- Voci correlate
- Altri progetti

L'algoritmo

La regola di Ruffini stabilisce un metodo per dividere il polinomio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

per il binomio

$$A(x) = x - r,$$

per ottenere il polinomio quoziente

$$Q(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0,$$

e un resto R che è un termine costante (eventualmente nullo), visto che deve essere di grado minore rispetto al polinomio divisore[2].

L'algoritmo non è altro che la divisione polinomiale di $P(x)$ per $A(x)$ scritto in un'altra forma più economica.

Per dividere $P(x)$ per $A(x)$, infatti[3].:

1. Si prendono i coefficienti di $P(x)$ e si scrivono in ordine. Si scrive poi r in basso a sinistra, proprio sopra la riga:

	a_n	a_{n-1}	$\dots$	a_1	a_0
r					

2. Si copia il coefficiente di sinistra a_n in basso, subito sotto la riga:

	a_n	a_{n-1}	$\dots$	a_1	a_0
r					
	a_n				
	$= b_{n-1}$				

3. Si moltiplica il numero più a destra di quelli sotto la riga, per r, e il risultato lo si scrive sopra la riga, spostato di un posto a destra:

	a_n	a_{n-1}	$\dots$	a_1	a_0
r		$b_{n-1} \cdot r$			
	a_n				
	$= b_{n-1}$				

4. Si somma questo valore con quello sopra di lui nella stessa colonna:

	a_n	a_{n-1}	$\dots$	a_1	a_0
r		$b_{n-1} \cdot r$			
	a_n	$b_{n-1} \cdot r + a_{n-1}$			
	$= b_{n-1}$	$= b_{n-2}$			

Si ripetono i passi 3 e 4 fino al termine dei coefficienti

	a_n	a_{n-1}	$\dots$	a_1	a_0
r		$b_{n-1} \cdot r$	$\dots$	$b_1 \cdot r$	$b_0 \cdot r$
	a_n	$b_{n-1} \cdot r + a_{n-1}$	$\dots$	$b_1 \cdot r + a_1$	$a_0 + b_0 \cdot r$
	$= b_{n-1}$	$= b_{n-2}$	$\dots$	$= b_0$	$= R$

I valori $b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_0$ sono i coefficienti del polinomio risultante $Q(x)$, il cui grado sarà inferiore di uno a quello di $P(x)$, invece R è il resto della divisione.

Un esempio numerico viene fornito più sotto.

Usi della regola

La regola di Ruffini ha varie applicazioni pratiche, molte di esse si basano sulla divisione semplice (come mostrato sotto) o sulle estensioni usuali che seguono.

Divisione polinomiale per $x - r$

Ecco un esempio di divisione polinomiale, con tutti i passaggi evidenziati[4].

Siano

$$P(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 6,$$
$$A(x) = x + 1.$$

Vogliamo dividere $P(x)$ per $A(x)$ usando la regola di Ruffini. Poiché $A(x)$ non è della forma $x - r$, ma piuttosto $x + r$, è sufficiente riscrivere $A(x)$ come

$$A(x) = x + 1 = x - (-1).$$

Applichiamo ora l'algoritmo.

1. Scriviamo i coefficienti di $P(x)$ e r:

	$+2$	-5	-1	$+6$
-1				

2. Copiamo il primo coefficiente sotto:

	$+2$	-5	-1	$+6$
-1				
	$+2$			

3. Moltiplichiamo il numero più a destra sotto la riga, per r, *e scriviamolo al posto successivo sopra la riga*:

	$+2$	-5	-1	$+6$
-1		-2		
	$+2$			

4. Sommiamo i valori della seconda colonna dopo la riga verticale:

	$+2$	-5	-1	$+6$
-1		-2		
	$+2$	-7		

5. Ripetiamo i passi 3 e 4 fino alla fine:

	$+2$	-5	-1	$+6$
-1		-2	7	-6
	$+2$	-7	$+6$	0

Abbiamo ottenuto, quindi, che:

$$P(x) = A(x) \cdot Q(x) + R,$$

dove

$$Q(x) = 2x^2 - 7x + 6,$$
$$R = 0.$$

Divisione polinomiale per $ax - k$

Applicando una facile trasformazione, la regola di Ruffini si può generalizzare anche per le divisioni di un polinomio per un binomio qualsiasi di primo grado $A(x) = ax - k$. Infatti, considerando la relazione fondamentale

$$P(x) = (ax - k) \cdot Q(x) + R(x),$$

dividendo tutto per a (sicuramente diverso da 0) otteniamo

$$\frac{P(x)}{a} = \frac{(ax - k) \cdot Q(x)}{a} + \frac{R(x)}{a}.$$

Detti $\frac{P(x)}{a} = P'(x)$ e $\frac{R(x)}{a} = R'(x)$ otteniamo:

$$P'(x) = (x - \frac{k}{a}) \cdot Q(x) + R'(x).$$

Dunque il quoziente richiesto $Q(x)$ è anche il quoziente della divisione di $P'(x)$ per $x - k/a$, che si può ottenere con la regola appena esposta. Per trovare il resto richiesto $R(x)$ basterà moltiplicare il resto ottenuto $R'(x)$ per a.

Trovare le radici di un polinomio

Il teorema delle radici razionali afferma che se un polinomio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

ha coefficienti interi, le sue radici razionali sono sempre della forma p/q, dove p e q sono interi coprimi, p è un divisore (non necessariamente positivo) di a_0 e q un divisore di a_n. Se il nostro polinomio è quindi

$$P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2,$$

le radici razionali possibili appartengono all'insieme dei divisori interi di $-2/1$ che sarà:

$$\{+1, -1, +2, -2\}.$$

Questo è un esempio semplice, perché il polinomio è monico (cioè, $a_n = 1$); per i polinomi non monici, l'insieme delle possibili radici comprenderà alcune frazioni, ma solo in numero finito, dato che a_n e a_0 hanno ciascuno un numero finito di divisori interi. In ogni caso per i polinomi monici ogni radice razionale è un intero, e quindi ogni radice intera dev'essere un divisore del termine costante. Si può dimostrare che questo resta vero anche per i polinomi non monici: insomma, *per trovare le radici intere di un polinomio a coefficienti interi, basta verificare i divisori del termine costante*. Infatti, ogni polinomio non monico può essere ricondotto al caso monico, semplicemente dividendo i coefficienti per a_n.

Provando pertanto a porre r pari a ciascuna delle radici possibili, si può provare a dividere il polinomio per $x - r$. Se il polinomio quoziente risultante ha resto 0, abbiamo trovato una radice. Questo metodo però non permette di trovare radici irrazionali o complesse.

Resta evidente che se $a_i > 0$ per $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, vale a dire che tutti i termini del polinomio $P(x)$ hanno coefficiente positivo, allora le uniche radici possibili per cui provare a dividere il polinomio sono quelle di segno negativo, inteso che nel polinomio vi sia almeno un termine con potenza di x ed n *dispari*.

Se, per esempio volessimo trovare le radici del precedente polinomio $P(x)$, dobbiamo dividere $P(x)$ per il binomio $x - a$ dove a è una delle radici possibili. Se il resto è uguale a 0, il numero utilizzato è una radice:

	$+1$	-4	$+5$	-2
$+1$		$+1$	-3	$+2$
	$+1$	-3	$+2$	0

	$+1$	-4	$+5$	-2
-1		-1	$+5$	-10
	$+1$	-5	$+10$	-12

	$+1$	-4	$+5$	-2
$+2$		$+2$	-4	$+2$
	$+1$	-2	$+1$	0

	$+1$	-4	$+5$	-2
-2		-2	$+12$	-34
	$+1$	-6	$+17$	-36

$x_1 = +1$ e $x_3 = +2$ sono radici, mentre $x_2 = -1$ e $x_4 = -2$ non lo sono.

Possiamo quindi scrivere il polinomio scomposto:

$$P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x-1)(x^2 - 3x + 2) = (x-2)(x^2 - 2x + 1) = (x-1)(x-1)(x-2).$$

Uguagliando $P(x) = 0$ per trovare le radici del polinomio, otteniamo che queste sono $x = 1$ (con molteplicità 2) e $x = 2$.

Fattorizzazione polinomiale

Dopo avere usato il metodo "p/q" mostrato sopra (o un qualunque altro modo) per trovare tutte le radici su $\mathbb{Q}$ di un certo polinomio, è semplice sfruttarle per fattorizzare parzialmente il polinomio stesso: a ogni fattore $x - r$ che divide un polinomio dato corrisponde una radice r, e viceversa.

Quindi, se abbiamo il polinomio:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

e abbiamo trovato come sue radici:

$$R = \{\alpha \in \mathbb{Q} : P(\alpha) = 0\},$$

consideriamo il prodotto:

$$Q(x) = a_n \prod_{r \in R} (x - r).$$

Per il teorema fondamentale dell'algebra, $Q(x)$ sarebbe uguale a $P(x)$ se tutte le radici di $P(x)$ fossero razionali. Ma è assai probabile che $Q(x)$ non sia uguale a $P(x)$, dato che $P(x)$ potrebbe avere anche radici irrazionali o complesse. Consideriamo allora il polinomio quoziente

$$S(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Se $S(x) = 1$, allora $Q(x) = P(x)$. Altrimenti, $S(x)$ sarà un polinomio, per la precisione un altro fattore di $P(x)$ che non ha radici razionali in $\mathbb{R}$. Dunque

$$P(x) = Q(x) \cdot S(x),$$

è una fattorizzazione completa di $P(x)$ su $\mathbb{Q}$ se $S(x) = 1$, altrimenti sarà una fattorizzazione completa su $\mathbb{Q}$, ma ci saranno altri fattori su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$.

Primo esempio: nessun resto

Sia

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2.$$

Con i metodi descritti sopra, troviamo che le radici razionali di $P(x)$ sono:

$$R = \{+1, -1, -2\}.$$

Pertanto, il prodotto di (x − ciascuna radice) è

$$Q(x) = 1(x-1)(x+1)(x+2),$$

$P(x)/Q(x)$ dà

$$S(x) = 1.$$

E così il polinomio fattorizzato è $P(x) = Q(x) \cdot 1 = Q(x)$:

$$P(x) = (x-1)(x+1)(x+2).$$

Secondo esempio: con resto

Sia

$$P(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x - 8.$$

Con i metodi descritti sopra, troviamo che le radici razionali di $P(x)$ sono:

$$R = \{-1, +2\}\,.$$

Pertanto, il prodotto di (x − ciascuna radice) è

$$Q(x) = (x+1)(x-2),$$

$P(x)/Q(x)$ dà

$$S(x) = 2x^2 - x + 4.$$

Dato che $S(x) \neq 1$, il polinomio fattorizzato sui razionali è $P(x) = Q(x) \cdot S(x)$:

$$P(x) = (x+1)(x-2)(2x^2 - x + 4).$$

Note

1. ^ Marzia Re Fraschini, Gabriella Grazzi, *I principi della matematica (Volume 3)*, Atlas, 2012, ISBN 978-88-268-1711-8. p.24
2. ^ Marzia Re Fraschini, Gabriella Grazzi, *I principi della matematica (Volume 3)*, Atlas, 2012, ISBN 978-88-268-1711-8. pp.24-25
3. ^ Marzia Re Fraschini, Gabriella Grazzi, *I principi della matematica (Volume 3)*, Atlas, 2012, ISBN 978-88-268-1711-8. p.26
4. ^ Massimo Bergamini, Graziella Barozzi, Anna Trifone, *Matematica.blu (seconda edizione) Vol. 1*, Zanichelli - Bologna, 2018, ISBN 978-88-08-22085-1. p.350

Bibliografia

- Marzia Re Fraschini, Gabriella Grazzi, *I principi della matematica (Volume 3)*, Atlas, 2012, ISBN 978-88-268-1711-8.
- Massimo Bergamini, Graziella Barozzi, Anna Trifone, *Matematica.blu (seconda edizione) Vol.1*, Zanichelli - Bologna, 2018, ISBN 978-88-08-22085-1.

Voci correlate

- Teorema di Ruffini
- Radice (matematica)
- Divisione dei polinomi
- Criterio di Cartesio
- Criterio di Routh-Hurwitz

- Criterio di Jury
- Regola di Horner

Altri progetti

- Wikimedia Commons (https://commons.wikimedia.org/wiki/?uselang=it) contiene immagini o altri file su **Regola di Ruffini (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Ruffini%27s_rule?uselang=it)**

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Regola_di_Ruffini&oldid=128654160"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 2 ago 2022 alle 22:03.

Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

Equazione lineare

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

Un'**equazione lineare**, o **equazione di primo grado**, è un'equazione algebrica in cui il grado massimo delle incognite è uguale a uno[1].

Indice

Equazioni lineari in una incognita

Equazioni lineari in più incognite

Note

Bibliografia

Voci correlate

Altri progetti

Collegamenti esterni

Equazioni lineari in una incognita

Quelle a una sola incognita sono riconducibili (tramite le usuali regole dell'algebra elementare) alla cosiddetta *forma normale* (o canonica):

$$ax + b = 0$$

dove a e b sono numeri reali o complessi.

Se $a \neq 0$ allora trasportando b al secondo membro e dividendo per a si ottiene[2]:

$$x = -\frac{b}{a}$$

L'equazione di primo grado ammette dunque una e una sola soluzione, pari a $-\frac{b}{a}$.

Se invece $a = 0$ allora l'equazione può essere impossibile o indeterminata:

- se $b = 0$, l'equazione diventa $0 = 0$, che è sempre vera indipendentemente da x. L'equazione è pertanto detta *indeterminata*.

- se $b \neq 0$, l'equazione diventa $0 = b$, che, essendo in realtà $b \neq 0$, è sempre falsa indipendentemente da x. L'equazione non ha soluzioni ed è pertanto *impossibile*.

Equazioni lineari in più incognite

Più in generale, un'equazione lineare in n incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ è riconducibile alla forma:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n + k = 0$$

In geometria analitica, un'equazione lineare a due incognite (scritta in genere nella forma $y = mx + q$ oppure $ax + by + c = 0$) rappresenta una retta nel piano cartesiano[3]. Nello spazio a tre dimensioni, un'equazione in tre incognite della forma $ax + by + cz + d = 0$ rappresenta un piano. In generale, nello spazio euclideo n-dimensionale, l'insieme delle soluzioni di un'equazione lineare in n incognite rappresenta un iperpiano, cioè uno spazio ad $n - 1$ dimensioni. Allo stesso modo un'equazione lineare a una sola incognita rappresenta un semplice punto.

Note

1. ^ Marzia Re Fraschini, Gabriella Grazzi, *I principi della matematica (Volume 1)*, Atlas, 2012, ISBN 978-88-268-1680-7. p.128
2. ^ Massimo Bergamini, Graziella Barozzi, Anna Trifone, *Matematica.blu (seconda edizione) Vol.1*, Zanichelli - Bologna, 2018, ISBN 978-88-08-22085-1. p.495
3. ^ Nella Dodero, Paolo Baroncini, Roberto Manfredi, *Nuovo corso di geometria analitica e di complementi di algebra*, Ghisetti e Corvi, 1995, ISBN 88-80-13173-7. p.208

Bibliografia

- Massimo Bergamini, Graziella Barozzi, Anna Trifone, *Matematica.blu (seconda edizione) Vol.1*, Zanichelli - Bologna, 2018, ISBN 978-88-08-22085-1.
- Marzia Re Fraschini, Gabriella Grazzi, *I principi della matematica (Volume 1)*, Atlas, 2012, ISBN 978-88-268-1680-7.

Voci correlate

- Equazione quadratica
- Equazione diofantea di primo grado
- Retta

Altri progetti

- Wikimedia Commons (https://commons.wikimedia.org/wiki/?uselang=it) contiene immagini o altri file su **equazione lineare (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Linear_equations?uselang=it)**

Collegamenti esterni

-
- (EN) *Equazione lineare*, su *Enciclopedia Britannica*, Encyclopædia Britannica, Inc.

- (EN) Eric W. Weisstein, *Equazione lineare*, su *MathWorld*, Wolfram Research.
- Equazioni lineari da youmath.it (http://www.youmath.it/lezioni/algebra-elementare/equazioni/164-sistemi-di-equazioni-lineari-di-primo-grado.html)

Controllo di autorità	Thesaurus BNCF 32452 (https://thes.bncf.firenze.sbn.it/termine.php?id=32452) · LCCN (EN) sh85044522 (http://id.loc.gov/authorities/subjects/sh85044522) · GND (DE) 4234490-6 (https://d-nb.info/gnd/4234490-6) · BNF (FR) cb11940360c (https://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb11940360c) (data) (https://data.bnf.fr/ark:/12148/cb11940360c) · J9U (EN, HE) 987007553018705171 (http://uli.nli.org.il/F/?func=find-b&local_base=NLX10&find_code=UID&request=987007553018705171)

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Equazione_lineare&oldid=119490841"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 25 mar 2021 alle 00:05.

Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

WIKIPEDIA

Cerchio

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

*Disambiguazione – Se stai cercando altri significati, vedi **Cerchio (disambigua)**.*

*Disambiguazione – Se stai cercando cerchio inteso come linea circolare, vedi **Circonferenza**.*

In geometria piana il **cerchio** è la parte di piano delimitata da una circonferenza[1] ed è costituito dall'insieme infinito dei punti che distano da un punto dato, detto centro, non più di una distanza fissata detta raggio. In un sistema di assi un generico cerchio di centro $(a; b)$ e raggio r è rappresentato dall'insieme di punti che soddisfano la seguente condizione:

$$\overline{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2\}.$$

Esso può essere immaginato come un poligono regolare con un numero di lati infinito, o meglio come il limite di una successione di poligoni regolari ad n lati per n che tende ad infinito. Il cerchio è una figura convessa.

Un segmento avente gli estremi sulla circonferenza è detto corda; ognuna delle due parti in cui questa divide il cerchio si chiama segmento circolare. Se la corda in questione passa per il centro, essa si chiama diametro e i due segmenti sono congruenti e si chiamano semicerchi.

Un segmento circolare può anche essere la parte di cerchio compresa tra due corde parallele.

L'intersezione fra un angolo al centro, cioè un angolo avente come vertice il centro del cerchio, ed il cerchio stesso (visivamente, uno "spicchio" di cerchio) si chiama settore circolare. Se l'angolo al centro è retto, il settore circolare che individua si chiama *quadrante*; se è piatto, è il semicerchio.

Due cerchi aventi lo stesso centro si dicono *concentrici*. L'area compresa fra le due circonferenze si chiama corona circolare.

La formula dell'area del cerchio può essere ottenuta come limite di quella del poligono regolare, ovvero come lunghezza della circonferenza per raggio diviso 2:

$$\text{Area} = \frac{\text{circonferenza} \times \text{raggio}}{2} = \pi r^2.$$

La quadratura del cerchio si riferisce all'impossibile compito di costruire con riga e compasso, a partire da un cerchio, un quadrato avente stessa area.

Alcuni solidi tridimensionali che possono avere, se tagliati da un piano, sezioni circolari sono la sfera, il cilindro ed il cono.

Il cerchio viene detto *inscritto* in un poligono quando la sua circonferenza è tangente ad ogni lato di quest'ultimo, e *circoscritto* quando i vertici di un poligono stanno sulla circonferenza.

Indice

L'area
- Metodo euristico archimedeo
- Integrazione con le coordinate polari
- Integrazione "a cipolla"
- Integrazione della semicirconferenza nel piano cartesiano

Il perimetro del cerchio
- Integrazione della semicirconferenza nel piano cartesiano

Cerchio, letteratura e filosofia

Angoli particolari nel cerchio
- Angolo al centro
- Proprietà

Formulario
- Formule geometriche
- Formule analitiche

Note

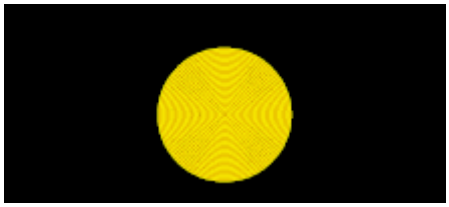
Voci correlate

Altri progetti

Collegamenti esterni

L'area

Metodo euristico archimedeo



Metodo di Archimede per ridurre l'area del cerchio ad un triangolo equivalente

Come sappiamo da una lettera di Archimede ad Eratostene, Archimede non disdegnava metodi empirici per arrivare ai suoi risultati che poi dimostrava rigorosamente per altre vie. Il matematico immaginò di suddividere il cerchio in tante circonferenze concentriche e di svolgerle poi in segmenti fino a formare un triangolo mostrando così che ogni cerchio è equivalente a un triangolo che ha per base la circonferenza e per altezza il raggio: $(2\pi r)r\frac{1}{2} = \pi r^2$.[2]

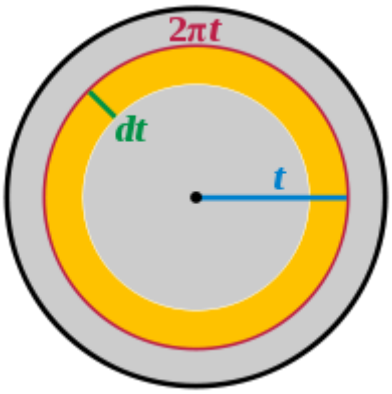
Integrazione con le coordinate polari

Il valore dell'area del cerchio può venir visto come il valore dell'integrale doppio della funzione $f(x,y)=1$ su un insieme coincidente con il cerchio. In formule si ha $\iint_{cerchio} 1 dx dy$.. Utilizzando il cambio di coordinate da cartesiane a polari si ottiene $\int_0^{2\pi}\int_0^R \rho d\rho d\theta$, dove ρ e θ sono le variabili polari. Al posto della funzione integranda $f(x,y)=1$ abbiamo $f(\rho,\theta)=\rho$ per via del cambio base. A questo punto l'integrale doppio si può scomporre nel prodotto di due integrali, in quanto le variabili sono separabili. Si ottiene

$$\int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^R \rho d\rho = 2\pi \cdot \frac{1}{2}R^2 = \pi R^2.$$

Integrazione "a cipolla"

Un primo approccio, tramite gli integrali, al calcolo dell'area del cerchio può essere fatto pensando che questa superficie è data dalla somma progressiva di infiniti cerchi concentrici che hanno come valore massimo la circonferenza e come minimo il centro del cerchio. In pratica è come se sommassimo tra di loro infiniti anelli, aventi ognuno spessore infinitesimo. Da questa rappresentazione comprendiamo come il nome *a cipolla* derivi proprio dalla stratificazione del cerchio, come quella di una cipolla, anche se in due dimensioni. Possiamo dunque chiamare t il raggio del cerchio a cui corrisponde ogni singola circonferenza, la cui lunghezza è $2\pi t$ (notiamo che in questa dimostrazione si dà per assunto questo dato). Quindi possiamo integrare (integrazione definita) $2\pi t\, dt$, cioè la funzione che ci dà le diverse circonferenze (separate dal fattore infinitesimo dt), tra il valore minimo e massimo dei loro raggi, 0 e r.



Un metodo di integrazione per calcolare l'area del cerchio

$$\text{Area}(r) = \int_0^r 2\pi t\, dt = \left[(2\pi)\frac{t^2}{2}\right]_{t=0}^{r} = \pi r^2.$$

Integrazione della semicirconferenza nel piano cartesiano

Per procedere al calcolo dell'area di un cerchio attraverso un secondo metodo consideriamo innanzitutto una circonferenza con centro nell'origine degli assi; questo ci permette infatti di semplificare il caso generico di una circonferenza traslata rispetto all'origine, dato che la traslazione non modifica l'area.

L'equazione di una circonferenza di generico raggio r e centro nell'origine degli assi è:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Come sappiamo dalla definizione la suddetta formula non è una funzione, in quanto associa ad alcuni punti più di un punto. Per risolvere questo inconveniente e integrare la funzione è sufficiente, dopo averla esplicitata rispetto alle ordinate, $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$, prenderne solo le immagini non negative.

Avremo quindi che l'equazione della funzione che ci descrive la semicirconferenza con centro nell'origine di generico raggio r è

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Per conoscere quindi l'area del cerchio completo basta calcolare l'area sottesa alla funzione, tra $-r$ e r:

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx.$$

Svolgiamo quindi i calcoli, ricorrendo al teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\begin{aligned}
\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx &= \left[\int \sqrt{r^2 - x^2}\right]_{-r}^{r} = \\
&= \left[\frac{1}{2}\left(r^2 \arcsin\left(\frac{x}{r}\right) + x\sqrt{r^2 - x^2}\right)\right]_{-r}^{r} = \\
&= \frac{1}{2}r^2 \arcsin\left(\frac{r}{r}\right) + \frac{1}{2}r\sqrt{r^2 - r^2} - \frac{1}{2}r^2 \arcsin\left(\frac{-r}{r}\right) - \frac{1}{2}(-r)\sqrt{r^2 - r^2} = \\
&= \frac{1}{2}r^2 \arcsin(1) + \frac{1}{2}r\sqrt{0} - \frac{1}{2}r^2 \arcsin(-1) + \frac{1}{2}r\sqrt{0} = \\
&= \frac{1}{2}r^2 \frac{\pi}{2} + 0 + \frac{1}{2}r^2 \frac{\pi}{2} + 0 = \\
&= \frac{1}{2}\pi r^2
\end{aligned}$$

Per arrivare alla formula finale ricordiamo che fin dal principio stavamo calcolando l'area tra il grafico della semicirconferenza $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ e l'asse x, per cui l'area del cerchio con centro nell'origine sarà il doppio:

$$2 \cdot \frac{1}{2}\pi r^2 = \pi r^2,$$

che è proprio la formula usata comunemente.

Dobbiamo notare che in questa dimostrazione diamo per definita la formula dell'arcoseno (per trovare una primitiva della funzione), e quindi buona parte della trigonometria; questo però significa inserire anche nei concetti necessari per usare questo metodo quello di pi greco, che è indissolubilmente legato al concetto di cerchio e alle relazioni tra le sue parti.

Il perimetro del cerchio

Il perimetro del cerchio si può calcolare con la formula $2\pi r$, cioè due volte il pi greco per il raggio.

Integrazione della semicirconferenza nel piano cartesiano

Il perimetro del cerchio, che si può definire anche come la lunghezza della circonferenza, si può pensare calcolabile grazie all'integrazione della funzione corrispondente alla semicirconferenza, avente centro nell'origine, tra $-r$ e r, cioè il raggio. Ovviamente non possiamo utilizzare l'integrale definito, ma ci serve l'integrale che associa ad una funzione la lunghezza della curva che descrive: la formula di questo integrale, data una funzione $f(x)$ e due punti a e b è:

$$\int_a^b \sqrt{1+\left(\dot{f}\left(x\right)\right)^2}\,dx.$$

Sappiamo che l'equazione di una circonferenza di generico raggio r e centro nell'origine degli assi è:

$$x^2+y^2=r^2.$$

Questa, come visto per l'area, va resa una funzione, e per farlo basta dopo averla esplicitata in funzione di y , $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$, prenderne solo le immagini non negative.

L'equazione della funzione che descrive la semicirconferenza che ci serve sarà allora

$$y=\sqrt{r^2-x^2}.$$

Per calcolare l'integrale ci serve però la derivata prima della funzione stessa, quindi:

$$y'=\frac{-2x}{2\sqrt{r^2-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}.$$

Adesso possiamo procedere al calcolo dell'integrale della curva tra $-r$ e r. Svolgiamo quindi i calcoli, ricorrendo come prima al teorema di Torricelli-Barrow:

$$\begin{aligned}
\int_{-r}^{r}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}\,dx &= \left[\int\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\right]_{-r}^{r}= \\
&= \left[\int\sqrt{\frac{r^2-x^2+x^2}{r^2-x^2}}\right]_{-r}^{r}= \\
&= \left[\int\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}\right]_{-r}^{r}= \\
&= \left[\int\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\right]_{-r}^{r}= \\
&= \left[\int\frac{r}{r\sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}}}\right]_{-r}^{r}= \\
&= \left[\int\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}}}\right]_{-r}^{r}= \\
&= \left[r\arcsin\left(\frac{x}{r}\right)\right]_{-r}^{r}= \\
&= r\arcsin\left(\frac{r}{r}\right)-r\arcsin\left(\frac{-r}{r}\right)= \\
&= r\arcsin(1)-r\arcsin(-1)= \\
&= r\frac{\pi}{2}+r\frac{\pi}{2}=
\end{aligned}$$

$$= 2 \cdot \frac{\pi r}{2} = \pi r$$

Ma dal momento che stavamo calcolando la lunghezza di una semicirconferenza, allora il perimetro del cerchio sarà pari al doppio del valore trovato, cioè:

$$2 \cdot \pi r = 2\pi r.$$

Ed è esattamente il valore che viene utilizzato solitamente.

Come per il calcolo dell'area, dobbiamo ricordare che per la dimostrazione è essenziale conoscere la trigonometria, che implica di fatto la conoscenza del valore di pi greco e il suo legame con le componenti di un cerchio. In pratica quindi quella che abbiamo fatto più che una dimostrazione è una riprova della formula che lega il raggio e la lunghezza di una circonferenza qualunque.

Cerchio, letteratura e filosofia

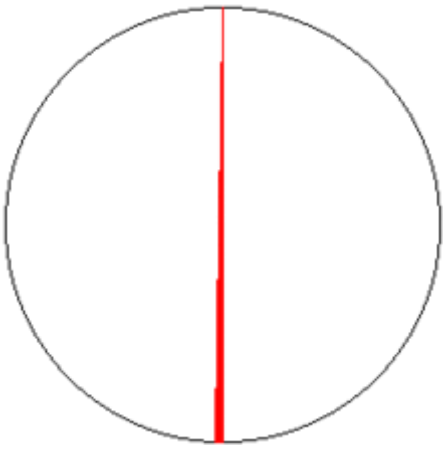
La figura del cerchio e del circolo è al centro dell'opera di Platone. Leonardo da Vinci preferì invece collocare al centro della natura la figura della spirale. Lo stesso fece Ralph Waldo Emerson, introducendo nel suo saggio sui "Cerchi" la figura di cerchi in espansione come simbolo dell'avanzamento dello spirito umano.

Angoli particolari nel cerchio

Angolo al centro

Si definisce 'angolo al centro' l'angolo che ha per vertice il centro della circonferenza e per lati due semirette che intersecano la circonferenza. Il cerchio è quindi diviso in due parti da ogni suo angolo al centro. La sua ampiezza si calcola con la seguente proporzione:

$$AB : C = a° : 360°.$$



L'angolo alla circonferenza che sottende un diametro dello stesso cerchio è sempre retto

Proprietà

L'angolo al centro è sempre il doppio del corrispondente angolo alla circonferenza, quando i vertici dell'angolo al centro e dell'angolo alla circonferenza sono dalla stessa parte rispetto alla corda individuata dai due punti di intersezione dei lati dei due angoli con la circonferenza. Quando invece il vertice dell'angolo alla circonferenza è dalla parte opposta rispetto al centro, l'angolo alla circonferenza è supplementare della metà dell'angolo al centro, cioè la somma dell'angolo alla circonferenza e la metà dell'angolo al centro è uguale ad un angolo piatto. Di conseguenza, se un angolo alla circonferenza è retto, esso sottende un diametro del cerchio, ovvero il corrispondente angolo al centro è piatto. Da ciò discendono le seguenti proprietà del triangolo rettangolo:

- ogni triangolo rettangolo è inscrivibile in un semicerchio;

- in ogni triangolo rettangolo, l'ipotenusa coincide con un diametro del cerchio circoscritto.

Formulario

Formule geometriche

Data una circonferenza, siano r il raggio, A l'area, $d = 2r$ il diametro, P il perimetro. Allora si ha:

Raggio $r = \frac{d}{2} = \frac{P}{2\pi} = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$;

Perimetro $P = 2\pi r = d\pi = 2\sqrt{\pi A}$;

Area $A = \pi r^2 = \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{P^2}{4\pi}$.

Formule analitiche

Avendo le coordinate del centro (x_0, y_0) e di un punto sulla circonferenza (x_i, y_i) è possibile determinare l'area

Raggio $\sqrt{(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2}$,

Area $\pi \left[(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2\right]$.

Date invece le coordinate di tre punti A, B, C qualsiasi sulla circonferenza le coordinate del centro si calcolano come quelle del circumcentro del triangolo[3]

$$x_0 = \frac{b_x}{-2a}; \quad y_0 = \frac{b_y}{-2a},$$

con

$$b_x = -\begin{vmatrix} x_A^2 + y_A^2 & y_A & 1 \\ x_B^2 + y_B^2 & y_B & 1 \\ x_C^2 + y_C^2 & y_C & 1 \end{vmatrix}; \quad b_y = \begin{vmatrix} x_A^2 + y_A^2 & x_A & 1 \\ x_B^2 + y_B^2 & x_B & 1 \\ x_C^2 + y_C^2 & x_C & 1 \end{vmatrix}; \quad a = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}.$$

Note

1. ^ *De Mauro*, su *old.demauroparavia.it* (archiviato dall'url originale il 1º gennaio 2008). Def. *1b*
2. ^ Anna Cerasoli, *L'area del cerchio*, in *Tutti in festa con Pi Greco*, illustrazioni di Federico Mariani, Trieste, Editoriale Scienza, 2015, ISBN 9788873077213.
3. ^ Circumcircle (http://mathworld.wolfram.com/Circumcircle.html) in Mathwold

Voci correlate

- Circonferenza

- Quadratura del cerchio
- Settore circolare
- Corona circolare
- Segmento circolare
- Sfera
- Intorno circolare

Altri progetti

- Wikiquote contiene citazioni di o su **cerchio**
- Wikizionario contiene il lemma di dizionario «**cerchio**»
- Wikimedia Commons (https://commons.wikimedia.org/wiki/?uselang=it) contiene immagini o altri file su **cerchio (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Discs?uselang=it)**

Collegamenti esterni

-
- (EN) Eric W. Weisstein, *Cerchio*, su *MathWorld*, Wolfram Research.

Controllo di autorità	Thesaurus BNCF 11846 (https://thes.bncf.firenze.sbn.it/termine.php?id=11846) · GND (DE) 4406111-0 (https://d-nb.info/gnd/4406111-0)

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Cerchio&oldid=133696033"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 27 mag 2023 alle 15:27.

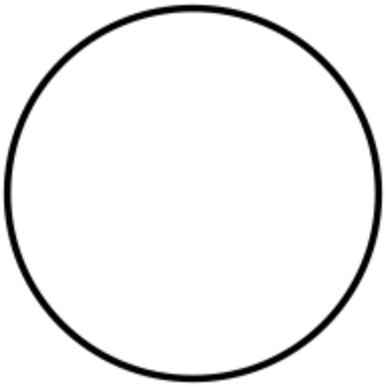
Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

Circonferenza

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

> **Questa voce o sezione sull'argomento geometria non cita le fonti necessarie o quelle presenti sono insufficienti**.

In geometria una **circonferenza** è il luogo geometrico di punti del piano equidistanti da un punto fisso detto *centro*. La distanza di qualsiasi punto della circonferenza dal centro si definisce raggio.



Una circonferenza

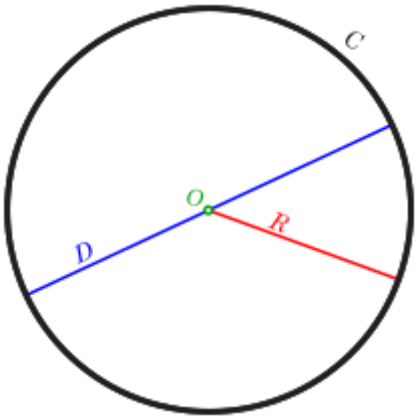


Illustrazione di un cerchio: la circonferenza (C) è disegnata in nero, il diametro (D) in ciano, il raggio (R) in rosso, e il centro (O) in verde. Circonferenza = π × diametro =
= 2 × π × raggio = [metri / centimetri].

Indice

Generalità

Circonferenza nel piano cartesiano
- Equazione cartesiana della circonferenza
- Equazione in coordinate polari
- Equazione parametrica

Problemi classici della circonferenza nel piano cartesiano
- Circonferenza di cui è noto il centro e il raggio
- Circonferenza per tre punti
- Calcoli e grafica al P.C.
- Rette tangenti condotte da un punto esterno
- Retta tangente su un punto della circonferenza

Circonferenza nel piano complesso

Circonferenza nello spazio

Componenti della circonferenza e loro proprietà
- Asse radicale

Topologia

Struttura di gruppo

Note

Voci correlate

Altri progetti

Collegamenti esterni

Generalità

Le circonferenze sono curve chiuse semplici che dividono il piano in una superficie interna ed una esterna (infinita). La superficie del piano contenuta in una circonferenza, insieme alla circonferenza stessa, prende il nome di cerchio, per cui:

- la circonferenza è un perimetro (ovvero, la misura della linea curva chiusa),
- il cerchio è l'area (ovvero, la misura della superficie circoscritta dalla suddetta linea).

Il rapporto tra la lunghezza della circonferenza di una ruota e il suo diametro è π

Per le altre superfici del piano geometrico, la lingua italiana non distingue l'area e il perimetro con due parole differenti. In inglese, oltre alle corrispondenti *circumference* e *circle*, la parola *disk* indica una regione del piano con alcune importanti proprietà, che può essere chiusa, oppure aperta, se *non* contiene il cerchio che essa delimita. Nota la circonferenza di un cerchio, per qualsiasi superficie (chiusa) del piano geometrico si può disegnare una circonferenza inscritta ed una circonferenza circoscritta.

La circonferenza è il caso particolare di una ellisse, in cui i due fuochi coincidono in uno stesso punto, che è il centro della circonferenza: l'ellisse ha due centri (detti fuochi), la circonferenza ha invece un solo centro. Si dice quindi che la circonferenza ha eccentricità nulla.
Ugualmente, la formula di calcolo per l'area del cerchio è un caso particolare della formula per l'area di un'ellisse.

Mediante il calcolo delle variazioni si dimostra che la circonferenza è la Figura piana che delimita la massima area per unità di perimetro quadrato.

Una circonferenza è inoltre un particolare caso di simmetria centrale, dal momento che tutti i punti della circonferenza sono equidistanti dal centro della stessa.
La formula per trovare la lunghezza della circonferenza è:

$$\mathrm{Crf} = 2 \cdot \pi \cdot r$$

oppure:

$$\mathrm{Crf} = d \cdot \pi$$

Dove:

- Crf sta per lunghezza (numero) della circonferenza (luogo geometrico);
- π sta per pi greco ($\pi = 3{,}141592653589793\ldots$);
- r sta per raggio del cerchio;
- d sta per diametro del cerchio.

Circonferenza nel piano cartesiano

In geometria analitica una circonferenza in un piano può essere descritta utilmente sia mediante le coordinate cartesiane, sia mediante le coordinate polari, sia in forma parametrica.

Equazione cartesiana della circonferenza

In un sistema di riferimento cartesiano Oxy, la circonferenza di centro (α, β) e raggio r è il luogo dei punti caratterizzati dall'equazione:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2,$$

cioè è l'insieme di tutti e soli i punti che distano r da (α,β). Tale equazione viene ricavata dalla distanza tra due punti. All'equazione più generale si dà spesso la forma canonica:

$$x^2+y^2+ax+by+c=0,$$

collegata alla precedente dalle seguenti eguaglianze:

$a=-2\alpha$, equivalente a: $\alpha=-\frac{a}{2}$
$b=-2\beta$, equivalente a: $\beta=-\frac{b}{2}$
$c=\alpha^2+\beta^2-r^2$, o equivalentemente $r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2-c}$.

Da ciò segue che se $\alpha^2+\beta^2-c=0$ la circonferenza degenera in un solo punto, (α,β), se $\alpha^2+\beta^2-c<0$ il luogo geometrico (nel piano cartesiano reale) descritto dall'equazione non è una circonferenza, ma l'insieme vuoto.

Se il centro della circonferenza è l'origine $(0,0)$, l'equazione diventa:

$$x^2+y^2=r^2.$$

Se la circonferenza passa per l'origine $(0,0)$, $c=0$ e l'equazione diventa:

$$x^2+y^2+ax+by=0.$$

Se la circonferenza ha centro sull'asse x, $b=0$ e l'equazione diventa:

$$x^2+y^2+ax+c=0.$$

Se la circonferenza ha centro sull'asse y, $a=0$ e l'equazione diventa:

$$x^2+y^2+by+c=0.$$

Equazione in coordinate polari

Nelle coordinate polari ρ e θ l'equazione della circonferenza con centro nell'origine e raggio r è evidentemente data dall'equazione:

$$\rho=r\ .$$

Equazione parametrica

Una circonferenza C il cui centro ha coordinate (x_0,y_0) e raggio R viene descritta con la seguente forma parametrica:

$$C: \begin{cases} x = x_0 + R\cos(t) \\ \\ y = y_0 + R\sin(t) \end{cases} \qquad t \in [0; 2\pi]$$

Problemi classici della circonferenza nel piano cartesiano

Circonferenza di cui è noto il centro e il raggio

Basta usare l'equazione $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$. A questo problema sono riconducibili anche i seguenti

1. è noto un diametro della circonferenza: il diametro è il doppio del raggio e il centro è il punto medio del diametro
2. sono noti due punti della circonferenza e una retta su cui sta il centro: l'asse di una corda passa sempre per il centro della circonferenza

Circonferenza per tre punti

Metodo geometrico

Basta ricordare che l'asse di una corda passa sempre per il centro della circonferenza. La procedura risolutiva è la seguente:

- si costruiscono gli assi di due corde;
- si fa il sistema tra le equazioni dei due assi;
- la soluzione del sistema è il centro della circonferenza;
- a questo punto si può calcolare il raggio.

Metodo algebrico

Il problema ha tre incognite: i coefficienti a, b, c dell'equazione canonica della circonferenza $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Si impone il passaggio per i tre punti dati dal problema e si ottiene un sistema lineare in tre equazioni e tre incognite a, b, c.

Calcoli e grafica al P.C.

Elaborati in Visual Basic (https://it.wikiversity.org/wiki/Categoria:Esercizi_di_geometria_analitica_su_P.C.)

Rette tangenti condotte da un punto esterno

Metodo geometrico

Basta ricordare che la distanza della retta tangente dal centro è pari al raggio della circonferenza stessa. La procedura risolutiva è la seguente:

- si costruisce un fascio proprio di rette con centro il punto esterno;

- si impone che la distanza delle rette del fascio dal centro della circonferenza sia uguale al raggio.

Metodo algebrico

Basta ricordare che in un sistema di secondo grado (retta-circonferenza) la condizione di tangenza si ha quando il sistema ammette due soluzioni reali e coincidenti, cioè quando l'*equazione associata* di secondo grado al sistema ha $\Delta = 0$.

Retta tangente su un punto della circonferenza

Questo problema è risolto ricordando che la retta tangente alla circonferenza è perpendicolare al raggio nel suo punto di tangenza. Quindi, salvo casi particolari in cui la tangente è parallela all'asse y, la procedura risolutiva è la seguente:

- si calcola il coefficiente angolare della retta del raggio che ha per estremo il punto di tangenza;
- si calcola il coefficiente angolare della perpendicolare a tale raggio;
- e quindi si calcola l'equazione della retta perpendicolare passante per il punto di tangenza.

Alternativamente è sufficiente usare la *formula di sdoppiamento* della circonferenza, così l'equazione della retta tangente alla circonferenza $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ nel punto (x_0, y_0) è semplicemente l'equazione

$$xx_0 + yy_0 + a\frac{x + x_0}{2} + b\frac{y + y_0}{2} + c = 0,$$

dove x_0, y_0, a, b, c sono dati.

Circonferenza nel piano complesso

Nel piano complesso una circonferenza di centro l'origine e raggio R può essere espressa dall'equazione parametrica

$$z(t) = Re^{it}$$

per $t \in [0, 2\pi]$. Per rendersi conto che tale formula descrive una circonferenza è sufficiente considerare le equazioni parametriche descritte sopra e confrontarle con la formula di Eulero.

Circonferenza nello spazio

È possibile descrivere una circonferenza nello spazio come intersezione di una sfera **S** con un piano π. Per calcolare il raggio di una circonferenza descritta nel seguente modo si può utilizzare il teorema di Pitagora:

- si calcola la distanza $d(\pi, P)$ del piano π dal centro della sfera **S**
- detto *R* il raggio della sfera **S**, il raggio r_c della circonferenza vale

$r_c = \sqrt{R^2 - d^2(\pi, P)}$.

Esempio

La circonferenza

$$C : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

è l'intersezione del piano

$$\pi : x + y + z = 1,$$

con la sfera *S* di centro origine e raggio 2. La distanza del centro della sfera dal piano vale $\frac{1}{\sqrt{3}}$. La distanza del centro della sfera dal piano è minore del raggio della sfera. Quindi il piano π interseca la sfera *S*. A questo punto il raggio r_c della circonferenza si calcola utilizzando il teorema di Pitagora:

$$r_c = \sqrt{4 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{11}{3}}$$

Componenti della circonferenza e loro proprietà

Tutte le circonferenze sono simili; di conseguenza, la circonferenza è proporzionale al raggio:

$$\text{Lunghezza della circonferenza} = 2\pi r.$$

Una retta che incontra una circonferenza in due punti si chiama secante, mentre una che tocca la circonferenza in un solo punto, chiamato punto di tangenza, si chiama tangente. Il raggio che congiunge il centro della circonferenza con il punto di tangenza è sempre perpendicolare alla tangente. Presi due punti sulla circonferenza, questi dividono la circonferenza in due archi. Se i due archi sono della stessa lunghezza si chiamano semicirconferenze. Il segmento che congiunge due punti sulla circonferenza si chiama corda. La corda di lunghezza massima, che passa per il centro, si chiama diametro, ed equivale al doppio del raggio.

Per due punti passano infinite circonferenze, ed il luogo dei loro centri è l'asse del segmento che congiunge i due punti. La perpendicolare condotta dal centro di una circonferenza a una sua corda la divide a metà. Due corde congruenti hanno la stessa distanza dal centro. Se da un punto P, esterno a una circonferenza di centro O si tracciano le rette r e s a essa tangenti, i segmenti di tangente compresi tra P e i punti di contatto con la circonferenza sono congruenti e il segmento OP è bisettrice dell'angolo rs di vertice P.

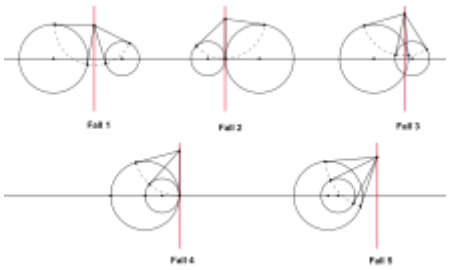
Per tre punti non allineati passa una ed una sola circonferenza, il cui centro coincide con l'intersezione degli assi dei segmenti che congiungono i punti. L'equazione della circonferenza passante per i punti (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) si può esprimere nel seguente modo:

$$\det \begin{bmatrix} x & y & x^2 + y^2 & 1 \\ x_1 & y_1 & x_1^2 + y_1^2 & 1 \\ x_2 & y_2 & x_2^2 + y_2^2 & 1 \\ x_3 & y_3 & x_3^2 + y_3^2 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

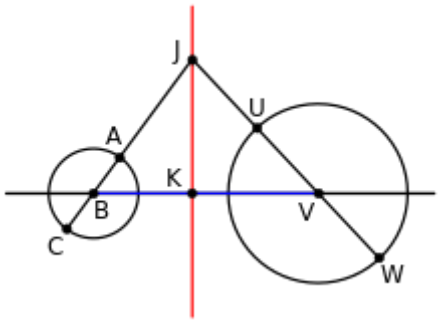
dove l'espressione a sinistra è il determinante della matrice.

Asse radicale

Date due circonferenze che si intersecano, si definisce **asse radicale**[1] la retta passante per i due punti in comune (*punti base*). Con semplici calcoli, partendo dall'equazione canonica e indicando con apici i coefficienti della seconda circonferenza, si ottiene che questa retta ha equazione $(a-a')x+(b-b')y+(c-c')=0$ ed è perpendicolare alla retta che congiunge i centri delle circonferenze. La definizione si estende facilmente al caso di circonferenze tangenti, chiamando asse radicale la retta tangente alle due circonferenze nel punto comune. Per estenderlo anche al caso in cui le circonferenze non hanno punti in comune l'asse radicale si definisce come la retta formata dai punti che hanno la stessa potenza rispetto alle due circonferenze. Questo concetto può essere ulteriormente generalizzato considerando i fasci di circonferenze. Approccio che, tra l'altro, permette di trattare unitariamente i suddetti casi[2].



L'asse radicale, segnato in rosso, con le circonferenze nelle diverse posizioni reciproche possibili.



Costruzione dell'asse radicale nel caso di circonferenze esterne come luogo in cui si uguaglia la potenza del punto **J** rispetto alle due circonferenze.

Topologia

Una *circonferenza topologica* si ottiene considerando un intervallo chiuso sulla retta reale e dotandolo della topologia quoziente che si ha identificando gli estremi.

La circonferenza è dotata di una naturale struttura di varietà differenziabile di dimensione 1, è uno spazio compatto e connesso ma non semplicemente connesso, infatti il suo gruppo fondamentale è il gruppo $\mathbb{Z}$ dei numeri interi.

Struttura di gruppo

La circonferenza è naturalmente dotata della struttura algebrica di gruppo: possiamo identificare ogni punto della circonferenza con l'angolo che esso forma rispetto ad una semiretta prefissata (in genere l'asse delle ascisse in un sistema di riferimento cartesiano) e definire la *somma* di due punti individuati dagli angoli α e β come il punto individuato dall'angolo $\alpha+\beta$. È immediato verificare che la circonferenza dotata di questa operazione verifica le proprietà di un gruppo e che come *gruppo* è isomorfo al gruppo quoziente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

La circonferenza è un esempio di gruppo di Lie.

Note

1. ^ Definizioni su sito Politecnico di Torino (http://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/argoment/ParoleMate/Mag_11/AsseRadicaleCirconferenze.htm)

2. ^ Si veda il paragrafo Asse radicale e punti di intersezione della voce sui Fasci di Circonferenze

Voci correlate

- Cerchio
- Circonferenza goniometrica
- Circonferenza unitaria
- Costruzione di Specht
- Fascio di circonferenze
- Partizione di Andrzej Szulkin
- Catena di Steiner

Altri progetti

- Wikiquote contiene citazioni sulla **circonferenza**
- Wikizionario contiene il lemma di dizionario «**circonferenza**»
- Wikimedia Commons (https://commons.wikimedia.org/wiki/?uselang=it) contiene immagini o altri file su **circonferenza (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Circle_area?uselang=it)**

Collegamenti esterni

-
- (EN) *Circonferenza*, su *Enciclopedia Britannica*, Encyclopædia Britannica, Inc.
- (EN) Eric W. Weisstein, *Circonferenza*, su *MathWorld*, Wolfram Research.

Controllo di autorità	Thesaurus BNCF 6846 (https://thes.bncf.firenze.sbn.it/termine.php?id=6846) · LCCN (EN) sh85026057 (http://id.loc.gov/authorities/subjects/sh85026057) · GND (DE) 4032962-8 (https://d-nb.info/gnd/4032962-8) · J9U (EN, HE) 987007286430105171 (http://uli.nli.org.il/F/?func=find-b&local_base=NLX10&find_code=UID&request=987007286430105171)

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Circonferenza&oldid=133072575"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 18 apr 2023 alle 18:58.

Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

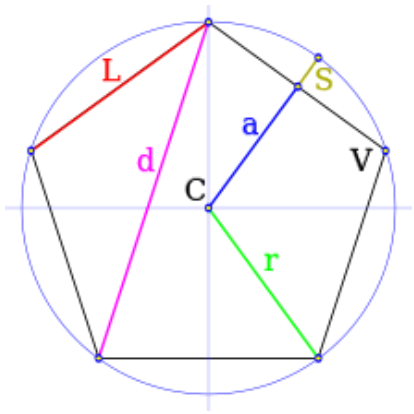
Poligono regolare

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

Questa voce o sezione sull'argomento geometria non cita le fonti necessarie o quelle presenti sono insufficienti.

Un **poligono regolare** è un poligono convesso che è contemporaneamente equilatero (cioè ha tutti i lati congruenti fra loro) e equiangolo (cioè ha tutti gli angoli congruenti fra loro). Si tratta cioè di una porzione convessa di piano euclideo delimitato da una linea spezzata **chiusa**, formata da una successione di segmenti di uguale lunghezza (detti lati), che formano tra di loro angoli di uguale ampiezza. Il nome *poligono* individua una pluralità (*poli*) di angoli (*gonos*) e il termine regolare sottende a una loro uguaglianza. Come in ogni poligono, il numero di lati coincide con il numero degli angoli e con il numero di vertici, inoltre affinché la porzione di piano individuata da tale spezzata sia non nulla, vi devono essere almeno 3 lati.

Un poligono regolare con 3 angoli si definisce triangolo equilatero, con 4 quadrato, con 5 pentagono regolare, con 6 esagono regolare, e si procede per n angoli anteponendo il prefisso che individua il numero di angoli al suffisso *-gono* seguito dal termine *regolare* al fine di marcare la distinzione con un poligono generico.



Pentagono regolare inscritto in una circonferenza.

- *C* = centro della circonferenza circoscritta,
- *V* = un vertice del poligono,
- *L* = un lato del poligono,
- *d* = una diagonale del poligono,
- *r* = un raggio della circonferenza circoscritta,
- *a* = un apotema del poligono.

Indice

Prime proprietà
Angoli
Apotema
Perimetro e area
Pentagono, esagono e decagono
Tabella riepilogativa
Note
Voci correlate
Altri progetti
Collegamenti esterni

Prime proprietà

Ogni poligono regolare con n lati è inscrivibile e circoscrivibile in due circonferenze, infatti tracciando le bisettrici degli angoli interni si ottengono n triangoli isosceli tutti congruenti e con un vertice in comune, che risulta quindi essere il centro di tali circonferenze.

Un poligono regolare è simmetrico rispetto a ogni retta passante per un vertice e il centro. Pertanto, vi sono esattamente n assi di simmetria; se poi il numero di lati n è pari, allora il centro è centro di simmetria per il poligono. Oltre a queste simmetrie, vi sono anche altre trasformazioni lineari che lasciano invariato il poligono, ossia le

rotazioni rispetto al centro di angoli multipli di $360°/n$. L'insieme di tutte queste trasformazioni forma un gruppo, il gruppo diedrale di ordine $2n$.

Ogni angolo interno di un poligono ha ampiezza pari a $(1-2/n)\cdot 180°$, pertanto la somma degli angoli interni è $(n-2)\cdot 180°$. Gli angoli esterni invece misurano $360°/n$ e dunque la loro somma consiste in un angolo di $360°$.

Non tutti i poligoni regolari sono costruibili con riga e compasso, si dimostra infatti che una condizione necessaria e sufficiente perché ciò accada è che i fattori primi dispari del numero di lati siano primi di Fermat distinti. In particolare, il triangolo equilatero, il quadrato, il pentagono e l'esagono regolari sono costruibili con riga e compasso, mentre l'ettagono regolare non lo è.

Costruzione con riga e compasso di un esagono regolare

Angoli

Dato che gli n triangoli isosceli in cui è scomponibile il poligono sono tutti congruenti, è chiaro che ogni angolo al centro α ha ampiezza

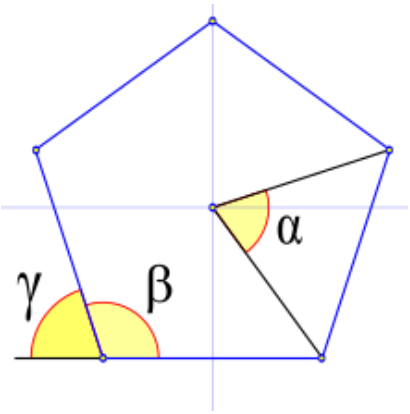
$$\alpha = \frac{360°}{n}.$$

Di conseguenza, dato che gli angoli alla base di tali triangoli isosceli hanno ampiezza che è la metà di ogni angolo interno β, si ha che

$$\beta = 2\cdot\frac{\beta}{2} = 180° - \alpha = \left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot 180°,$$

mentre ogni angolo esterno γ ha ampiezza

$$\gamma = 180° - \beta = \frac{360°}{n} = \alpha.$$



α = angolo al centro,
β = angolo interno,
γ = angolo esterno.

Dato che il numero di angoli interni, esterni e al centro è sempre n, segue che la somma degli angoli interni è

$$n\beta = (n-2)\cdot 180°,$$

mentre la somma di somma degli angoli al centro (o, equivalentemente, degli angoli esterni) è

$$n\alpha = n\gamma = 360°.$$

Apotema

Ogni poligono regolare è inscrivibile e circoscrivibile in due circonferenze concentriche. Il raggio della circonferenza inscritta è detto apotema e, chiaramente, coincide con la distanza dal centro di un qualsiasi lato del poligono. È facile ricavare una relazione tra l'apotema e il raggio della circonferenza circoscritta. Infatti, dato che i lati uguali di ognuno degli n triangoli isosceli che compongono il poligono sono raggi della circonferenza circoscritta e che gli angoli alla base hanno ampiezza $\beta/2$, risulta che l'apotema (che coincide con l'altezza di tali triangoli) misura

$$a = r\sin\frac{\beta}{2} = r\sin\left(90° - \frac{180°}{n}\right) = r\cos\frac{180°}{n},$$

ove r è il raggio della circonferenza circoscritta. Esprimendo l'apotema in funzione del lato l del poligono (nonché base del triangolo isoscele), si ha

$$a = \frac{l}{2}\tan\frac{\beta}{2} = \frac{l}{2}\tan\left(90^\circ - \frac{180^\circ}{n}\right) = \frac{l}{2}\cot\frac{180^\circ}{n}.$$

Da queste due equazioni si può anche ricavare il raggio della circonferenza circoscritta in funzione del lato:

$$r = \frac{l}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}.$$

Perimetro e area

Il perimetro P_n è definito come la lunghezza della spezzata che delimita il poligono. Chiaramente risulta

$$P_n = nl,$$

o anche, usando le formule della sezione precedente,

$$P_n = 2nr\sin\frac{180^\circ}{n} = 2na\tan\frac{180^\circ}{n}.$$

Per calcolare l'area di un poligono regolare è sufficiente moltiplicare per n l'area dei triangoli isosceli che lo compongono. Quindi, dato che tali triangoli hanno come base un lato e come altezza l'apotema, il poligono regolare di n lati ha area

$$A_n = n\frac{al}{2} = \frac{nl^2}{4}\cot\frac{180^\circ}{n},$$

o, equivalentemente,

$$A_n = nr^2\sin\frac{180^\circ}{n}\cdot\cos\frac{180^\circ}{n} = \frac{nr^2}{2}\sin\frac{360^\circ}{n} = na^2\tan\frac{180^\circ}{n}.$$

Si noti che per n che tende all'infinito, l'area tende a

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \pi r^2,$$

perché

$$\lim_{n\to+\infty} n\tan\frac{180^\circ}{n} = \pi,$$

che non è altro che l'area del cerchio circoscritto, confermando così l'intuizione che al crescere del numero dei lati il poligono vada a "riempire" il cerchio circoscritto. Allo stesso modo si trova che

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = 2\pi r,$$

poiché

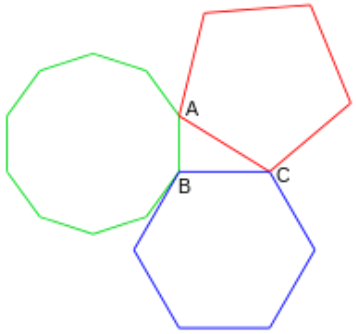
$$\lim_{n\to+\infty} n\sin\frac{180^\circ}{n} = \pi.$$

Pentagono, esagono e decagono

Nel libro XIII dei suoi Elementi, Euclide dimostra la seguente proposizione:

«Se si iscrive in un cerchio un pentagono equilatero, il quadrato del lato del pentagono è uguale alla somma dei quadrati dei lati dell'esagono e del decagono regolari che siano inscritti nello stesso cerchio.»

Di questa proposizione Euclide dà una lunga spiegazione geometrica, ma qui ci limiteremo a una verifica ottenibile conoscendo la lunghezza dei lati e applicando il teorema di Pitagora. Ammesso che il cerchio in cui si inscrivono i poligoni abbia raggio unitario, le formule che esprimono le lunghezze del lato L_5 del pentagono, L_6 dell'esagono e L_{10} del decagono, sono le seguenti:



I lati AC del Pentagono, BC dell'Esagono e AB del Decagono regolari, inscritti in cerchi di pari raggio, formano i lati di un triangolo rettangolo

- $L_5 = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$;
- $L_6 = 1$;
- $L_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Allora:

$$\sqrt{L_6^2 + L_{10}^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{5}{4} - \frac{2\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{10}{4} - \frac{2\sqrt{5}}{4}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2} = L_5$$

Quindi dato che la somma dei quadrati dei lati dell'esagono e del decagono dà il quadrato del lato del pentagono, ne consegue che il lato del pentagono è ipotenusa di un triangolo rettangolo i cui cateti sono i lati dell'esagono e del decagono.

Tabella riepilogativa

N.B.: Se si pensa a un poligono con un grandissimo numero di lati, l'angolo interno di quel poligono tende a diventare piatto, il lato tende a diventare nullo e l'area si avvicina di più a pi greco.

Costruzione del pentagono regolare

Costruzione approssimata
dell'ettagono regolare

Numero di lati, angoli e vertici	Poligono	Disegno	Angolo interno	Lato[1]	Area[1]	Animazione: costruzione con riga e compasso
3	Triangolo equilatero		60°	√3≅1.732	3/4·√3≅1.299	Costruzione esatta
4	Quadrato		90°	√2≅1.414	2	Costruzione esatta
5	Pentagono		108°	≅1.176	≅2.378	Costruzione esatta
6	Esagono		120°	1	3/2·√3≅2.598	Costruzione esatta
7	Ettagono		≅128,57°	≅0.868	≅2.736	Costruzione approssimata
8	Ottagono		135°	≅0.765	2·√2≅2.828	Costruzione esatta
9	Ennagono		140°	≅0.684	≅2.893	Costruzione approssimata
10	Decagono		144°	≅0.618	≅2.939	Costruzione esatta
11	Endecagono		≅147,27°	≅0.563	≅2.974	Costruzione approssimata
12	Dodecagono		150°	≅0.518	3	Costruzione esatta
13	Tridecagono		≅152,31°	≅0.479	≅3.021	Costruzione approssimata
14	Tetradecagono		≅154,29°	≅0.445	≅3.037	Costruzione approssimata
15	Pentadecagono		156°	≅0.416	≅3.051	Costruzione esatta
16	Esadecagono		157,5°	≅0.390	≅3.061	Costruzione esatta
17	Ettadecagono		≅158,82°	≅0.367	≅3.071	Costruzione esatta 34-gono, 51-gono 85-gono, 255-gono
18	Ottadecagono		160°	≅0.347	≅3.078	Costruzione approssimata
19	Ennadecagono		≅161,05°	≅0.329	≅3.085	Costruzione approssimata
20	Icosagono		162°	≅0.313	≅3.090	Costruzione esatta
257	257-gono		≅178.6°	≅0.024	≅3,141	Costruzione esatta
65537	65537-gono		≅179.9945°	≅0.000096	≅3,1416	Costruzione parziale

Note

1. Riferito al poligono regolare con raggio circoscritto pari a uno.

Voci correlate

- Geometria piana
- Poligono
- Poligono regolare improprio

Altri progetti

- Wikimedia Commons (https://commons.wikimedia.org/wiki/?uselang=it) contiene immagini o altri file su **poligono regolare (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Regular_polygons?uselang=it)**

Collegamenti esterni

-
- (EN) *Poligono regolare*, su *Enciclopedia Britannica*, Encyclopædia Britannica, Inc.
- (EN) Eric W. Weisstein, *Poligono regolare*, su *MathWorld*, Wolfram Research.

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Poligono_regolare&oldid=128913674"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 20 ago 2022 alle 09:33.

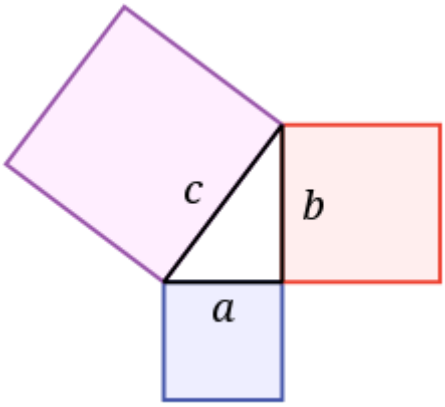
Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

WIKIPEDIA

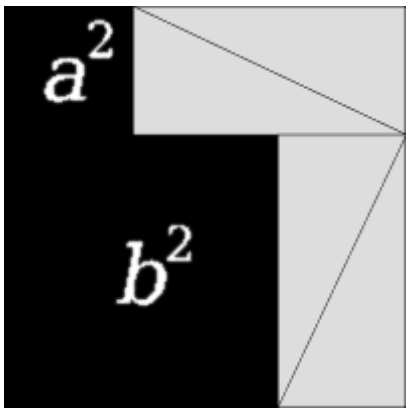
Teorema di Pitagora

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

Il **teorema di Pitagora** è un teorema della geometria euclidea che stabilisce una relazione fondamentale tra i lati di un triangolo rettangolo.



In un triangolo rettangolo la somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti (blu e rosso) è uguale all'area del quadrato costruito sull'ipotenusa (viola).



Animazione a prova del Teorema di Pitagora

Si può considerare un caso speciale, per i triangoli rettangoli, del teorema del coseno.

Indice

Origine

Enunciato

Dimostrazioni
- Dimostrazione di Abu'l-Wafa
- Dimostrazione di Airy
- Quadrati concentrici di Pomi
- Dimostrazione di Garfield
- Con i teoremi di Euclide

Inverso
- Applicazioni pratiche dell'enunciato inverso

Generalizzazioni
- Teorema del coseno
- Teorema dei seni
- Generalizzazione che non fa uso di trigonometria
- Generalizzazione a tutte le figure simili

Negli spazi prehilbertiani
- Dimostrazione

Leggenda di Pitagora e delle piastrelle

Significato esoterico del teorema

Note

Bibliografia

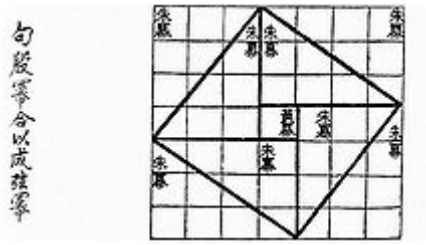
Voci correlate

Altri progetti

Collegamenti esterni

Origine

Quello che modernamente conosciamo come *teorema di Pitagora* viene attribuito al filosofo e matematico Pitagora. In realtà il suo enunciato (ma non la sua dimostrazione) era già noto ai Babilonesi[1]. Viene a volte affermato che il teorema di Pitagora fosse noto agli antichi Egizi: Carl Boyer esclude questa ipotesi, basandosi sull'assenza del teorema dai papiri matematici rinvenuti.[2] Era conosciuto anche in Cina e sicuramente in India, come



Visualizzazione del caso del triangolo (3,4,5) contenuta nel testo cinese Chou Pei Suan Ching (scritto tra il 200 a.C. e il 200 d.C.)

dimostrano molte scritture fra cui lo *Yuktibhāṣā* e gli *Śulbasūtra*. Non sono note dimostrazioni del teorema considerate tutt'oggi valide e antecedenti o coeve a Pitagora.

Enunciato

> *In ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente all'unione dei quadrati costruiti sui cateti.*

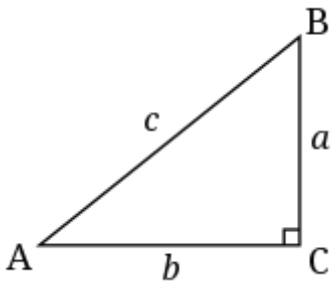
oppure:

> *In ogni triangolo rettangolo l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti.*

L'uso dell'aggettivo *uguale* invece di *equivalente* richiede di riferirsi o alle aree dei quadrati "costruiti" sui cateti e sull'ipotenusa (area intesa come misura dell'estensione di una superficie), oppure ai quadrati delle lunghezze dei cateti/quadrato della lunghezza dell'ipotenusa. La possibile ambivalenza della lingua italiana deriva dal fatto che, in assenza del termine *costruito*, la parola *quadrato* può definire sia la *superficie* della figura geometrica in quanto tale, sia la generica operazione di elevamento alla seconda potenza.

In altre lingue, segnatamente in inglese, francese e spagnolo, nell'enunciato del teorema di Pitagora si preferisce parlare di quadrati (delle lunghezze) dei cateti e dell'ipotenusa, il che consente il semplice utilizzo dei termini *equal* (in inglese), *égal* (in francese), *igual* (in spagnolo). Per esempio, in spagnolo, *el cuadrado de la hipotenusa* significa, senza ambiguità, il "quadrato (della misura) dell'ipotenusa".

Dato un triangolo rettangolo di lati a, b e c, ed indicando con c la sua ipotenusa e con a e b i suoi cateti, il teorema è espresso dall'equazione:



$$a^2 + b^2 = c^2,$$

o, esplicitando c:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = c.$$

Le misure dei cateti sono perciò:

$$\sqrt{c^2 - b^2} = a,$$

e

$$\sqrt{c^2 - a^2} = b.$$

Una terna di numeri interi positivi a, b, c che soddisfi il teorema di Pitagora si dice terna pitagorica.

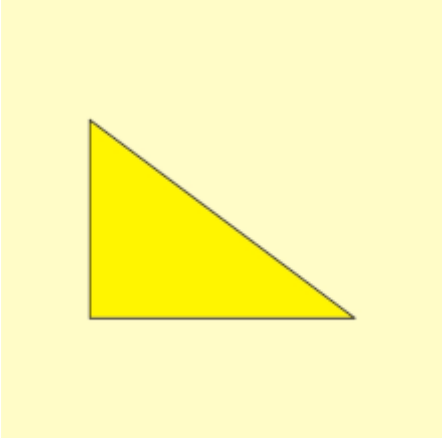
Viceversa, ogni triangolo in cui i tre lati verifichino questa proprietà è rettangolo: questo teorema, con la sua dimostrazione, appare nell'ultimo enunciato del primo libro di *Elementi*.

Dimostrazioni

La dimostrazione classica del teorema di Pitagora completa il primo libro degli *Elementi* di Euclide e ne costituisce il filo conduttore. Dato che richiede il postulato delle parallele, esso non vale nelle geometrie non-euclidee e nella geometria neutrale. Nel testo di Euclide la dimostrazione del teorema è immediatamente preceduta dalla dimostrazione della costruibilità dei quadrati. L'esistenza stessa dei

quadrati dipende infatti dal postulato delle parallele e viene meno nelle geometrie non euclidee. Questo aspetto del problema è in genere trascurato nella didattica contemporanea, che tende spesso ad assumere come ovvia l'esistenza dei quadrati.

La dimostrazione del teorema di Pitagora consiste nel riempire uno stesso quadrato di lato uguale alla somma dei cateti prima con quattro copie del triangolo rettangolo più il quadrato costruito sull'ipotenusa e poi con quattro copie del triangolo rettangolo più i quadrati costruiti sui cateti, come in figura.

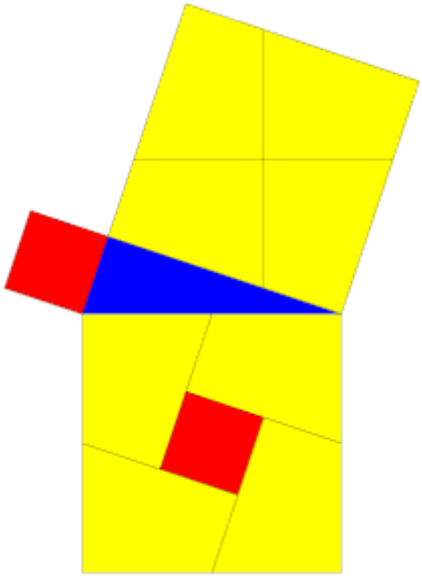


Animazione di una dimostrazione

Essendo il teorema uno dei più noti della storia della matematica, ne esistono moltissime dimostrazioni, in totale alcune centinaia, opera di matematici, astronomi, agenti di cambio, per esempio un presidente statunitense James A. Garfield e Leonardo da Vinci. Per questo teorema sono state classificate dallo scienziato statunitense Elisha Scott Loomis 371 differenti dimostrazioni, che sono state pubblicate nel 1927 nel suo libro The Pythagorean Proposition.

Dimostrazione di Abu'l-Wafa

La dimostrazione attribuita al matematico e astronomo persiano Abu'l-Wafa verso la fine del X secolo[3][4] e riscoperta dall'agente di cambio Henry Perigal (trovata nel 1835-1840[5], pubblicata nel 1872 e successivamente nel 1891[6]) si basa sulla scomposizione del quadrato costruito sul cateto maggiore, in giallo nell'immagine: tagliandolo infatti con due rette passanti per il suo centro, una perpendicolare ed una parallela all'ipotenusa, si può ricomporre in maniera da incorporare l'altro quadrato, e formando il quadrato sull'ipotenusa, come nella figura. Questo procedimento è legato al problema della trisezione del quadrato.



Dimostrazione di Abu'l-Wafa' i Perigal

Dimostrazione di Airy

Esiste anche una dimostrazione poetica, dell'astronomo Sir George Airy, in inglese:

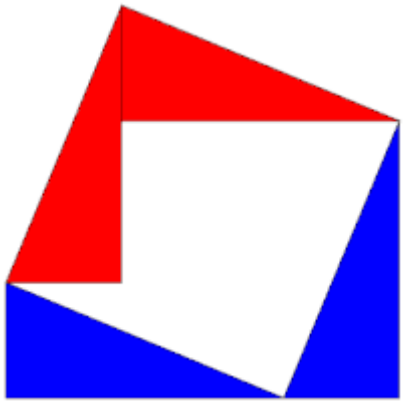
> "*I am, as you can see,*
> *$a^2 + b^2 - ab$*
> *When two triangles on me stand,*
> *Square of hypothenuse is plann'd*
> *But if I stand on them instead*
> *The squares of both sides are read.*"

di cui una traduzione letterale è

> "*Come potete vedere, sono*
> *$a^2 + b^2 - ab$*
> *Quando ci sono due triangoli sopra di me*
> *È rappresentato il quadrato dell'ipotenusa*
> *Ma se invece sto io sopra di loro*
> *Si leggono i quadrati dei due lati*"

I versi si riferiscono alla parte bianca: i primi due triangoli sono quelli rossi, i secondi quelli blu.

Sia quella di Perigal sia quest'ultima sono puramente geometriche, ossia non richiedono alcuna definizione di operazioni aritmetiche, ma solo congruenze di aree e di segmenti.



Dimostrazione di Airy

Quadrati concentrici di Pomi

Dimostrazione geometrica basata su due quadrati concentrici, di lati rispettivamente pari all'ipotenusa (c) e alla somma dei due cateti ($a+b$).

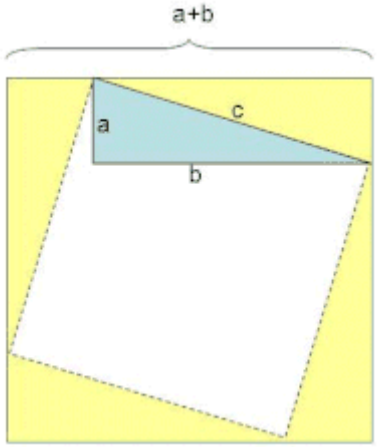
Come si vede dalla figura, tolti i quattro triangoli rettangoli (in giallo di area $(ab)/2$) al quadrato più grande, che corrisponde all'area $(a+b)^2$, si ottiene il quadrato più piccolo, rappresentato in bianco, che equivale invece all'area c^2.

Quindi

$$(a+b)^2 - 4(ab)/2 = c^2,$$

da cui risolvendo si ottiene

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

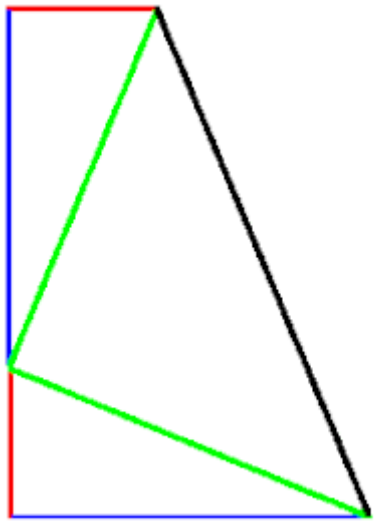


Dimostrazione con quadrati concentrici

Questa dimostrazione, utilizzando il passaggio algebrico del quadrato della somma di due numeri, ha una rappresentazione visiva semplice e diretta, che non richiede lo spostamento e sovrapposizione di forme come le altre dimostrazioni geometriche formulate.

Dimostrazione di Garfield

Un'altra dimostrazione geometrica, nella cui costruzione non compare alcun quadrato, fu trovata nel 1876 da James Abraham Garfield, che in seguito divenne il ventesimo Presidente degli Stati Uniti d'America. Allora nell'esercito, Garfield commentò il suo risultato: "Pensiamo che con questa dimostrazione matematica possiamo trovare d'accordo tutti i deputati, indipendentemente dal loro credo politico". Garfield aveva avviato una spietata campagna anticorruzione che gli aveva causato l'astio di numerosi colleghi parlamentari, tanto che venne ucciso pochi mesi dopo essere eletto presidente.[7]



Dimostrazione di Garfield

La dimostrazione segue sostanzialmente il metodo usato nella dimostrazione di Pomi, applicato però a metà figura, considerando cioè il trapezio anziché il quadrato:

> Consideriamo una copia del triangolo rettangolo in questione, ruotata di 90 gradi in modo da allineare i

due cateti differenti (nella figura a lato il rosso ed il blu). Si uniscono poi gli estremi delle ipotenuse, ottenendo un trapezio. Uguagliando l'area del trapezio alla somma di quelle dei tre triangoli rettangoli, si dimostra il teorema.

In formule, detto a il cateto rosso, b il blu e c l'ipotenusa, e ricordando la potenza del binomio

$$\frac{(a+b)^2}{2} = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2} \;\Rightarrow\; a^2 + b^2 = c^2.$$

Con i teoremi di Euclide

Un'altra dimostrazione utilizza il primo teorema di Euclide. Si traccia l'altezza sull'ipotenusa. Questa spezza l'ipotenusa in due segmenti, di lunghezza p e q. Il teorema di Euclide fornisce le relazioni

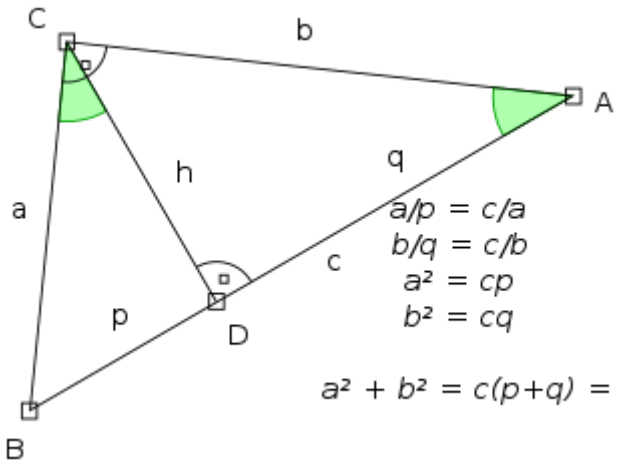
$$\frac{a}{p} = \frac{c}{a},\ \frac{b}{q} = \frac{c}{b},$$

da cui

$$a^2 = cp,\ b^2 = cq$$

e quindi

$$a^2 + b^2 = c(p+q) = c^2.$$



Dimostrazione con Euclide

Inverso

Vale anche l'inverso del Teorema di Pitagora (proposizione 48 del primo libro degli *Elementi* di Euclide): "Se in un triangolo di lati a, b e c vale la relazione $a^2 + b^2 = c^2$, allora il triangolo è rettangolo".

Dimostrazione. Sia T un triangolo di lati a, b e c tale che $a^2 + b^2 = c^2$. Consideriamo un secondo triangolo rettangolo T' che abbia i cateti pari ad a e b (è sempre possibile costruire un triangolo rettangolo dati i due cateti). Per il teorema di Pitagora (diretto) l'ipotenusa del triangolo T' sarà pari a $\sqrt{a^2 + b^2}$, ossia sarà uguale al lato c del triangolo T. I due triangoli T e T' risulteranno dunque congruenti per il terzo criterio di congruenza, avendo tutti e tre i lati ordinatamente uguali. Ma allora anche il triangolo T sarà rettangolo *(CVD)*.

Un corollario del teorema di Pitagora consente di determinare se un triangolo sia o meno rettangolo, acutangolo o ottusangolo. Là dove c è scelto come ipotenusa, il lato più lungo dei tre, e $a + b > c$ (altrimenti non avremo un triangolo), valgono le seguenti relazioni:

- se $a^2 + b^2 = c^2$, allora il triangolo è rettangolo;
- se $a^2 + b^2 > c^2$, allora il triangolo è acutangolo;
- se $a^2 + b^2 < c^2$, allora il triangolo è ottusangolo.

Applicazioni pratiche dell'enunciato inverso

L'enunciato inverso fornisce anche un sistema per costruire un angolo retto (o per controllare la quadratura di un angolo già esistente) in situazioni pratiche, come la topografia o l'agrimensura.

A titolo di esempio, con una fune di lunghezza pari alla somma di una terna pitagorica (diciamo 12, somma di 5, 4 e 3, in una qualche unità di misura) sarebbe sufficiente disporre le due porzioni minori della corda (quelle di misura 4 e 3) ad un certo angolo fra loro; se gli estremi della fune, disposta infine in forma triangolare, si chiudono, si saprà che l'angolo compreso fra le due porzioni minori della corda (a questo punto i due cateti) è certamente retto.

Generalizzazioni

Il teorema di Pitagora può essere generalizzato in vari modi. Solitamente, una generalizzazione è una relazione che si applica a tutti i triangoli, e che applicata ai triangoli rettangoli risulta essere equivalente al teorema di Pitagora.

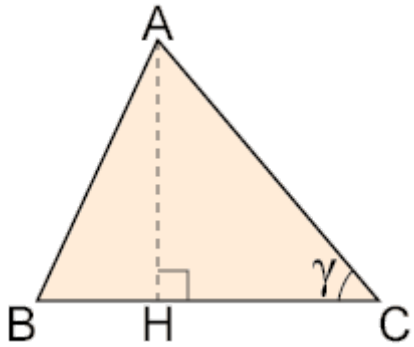
Teorema del coseno

Lo stesso argomento in dettaglio: ***Teorema del coseno***.

Una generalizzazione del teorema di Pitagora è il teorema del coseno, che si applica ad un triangolo qualsiasi (non necessariamente retto). In un triangolo con vertici e angoli indicati come in figura, vale l'uguaglianza:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AC} \cdot \overline{BC} \cos\gamma.$$

Nel caso in cui γ sia retto, vale $\cos\gamma = 0$ e quindi l'enunciato è equivalente al teorema di Pitagora. Il termine aggiuntivo può essere interpretato come il prodotto scalare dei vettori CA e CB.



Un triangolo qualsiasi.

Teorema dei seni

Lo stesso argomento in dettaglio: ***Teorema dei seni***.

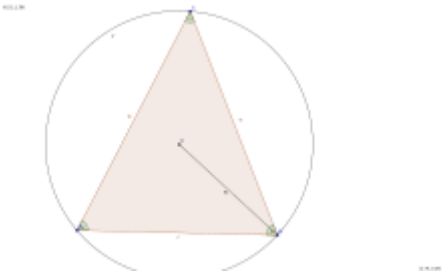
Il teorema dei seni mette in relazione le lunghezze dei lati di un triangolo e i seni degli angoli opposti. Anche questa relazione si applica a qualsiasi triangolo e, nel caso in cui questo sia rettangolo, può essere ritenuta equivalente al teorema di Pitagora (benché in modo meno immediato rispetto al teorema del coseno).

Il teorema dei seni asserisce che in un triangolo qualsiasi, con le notazioni come in figura, valgono le relazioni seguenti:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Elevando al quadrato:

$$c^2 = a^2 \frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\alpha}, \quad b^2 = a^2 \frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}.$$


Il teorema dei seni mette in relazione lunghezze dei lati e angoli opposti.

Sommando i termini si ottiene:

$$c^2 + b^2 = a^2 \frac{\sin^2 \gamma + \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha}.$$

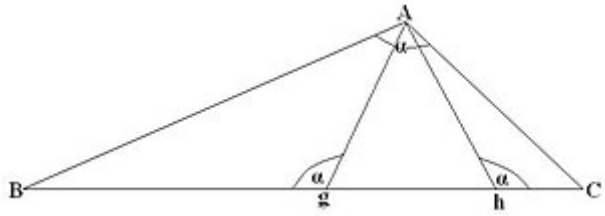
Quando α è un angolo retto, si ottiene $\beta = \pi/2 - \gamma$ e quindi

$$\frac{\sin^2 \gamma + \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha} = \sin^2(\pi/2 - \beta) + \sin^2 \beta = \cos^2 \beta + \sin^2 \beta = 1.$$

Si ottiene quindi in questo caso il teorema di Pitagora

$$c^2 + b^2 = a^2.$$

Generalizzazione che non fa uso di trigonometria



Generalizzazione del teorema di Pitagora.

È possibile estendere il teorema di Pitagora ad un triangolo qualsiasi senza fare uso di funzioni trigonometriche quali il seno ed il coseno. Dato un triangolo ABC come in figura, si tracciano due segmenti che collegano il vertice A con due punti g e h contenuti nel segmento opposto BC (oppure in un suo prolungamento), in modo tale che gli angoli AgB e AhC siano entrambi uguali all'angolo α del vertice A. La figura mostra un caso in cui l'angolo α è ottuso: se è acuto, i due punti g e h sono in ordine inverso (il primo a destra e il secondo a sinistra) e possono uscire dal segmento BC.

Vale la relazione seguente:

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot (\overline{Bg} + \overline{hC}).$$

Quando α è un angolo retto, i punti g e h coincidono e si ottiene il teorema di Pitagora

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot (\overline{Bg} + \overline{hC}) = \overline{BC}^2.$$

La relazione generale può essere dimostrata sfruttando la similitudine fra i triangoli ABC, gBA e hAC, che porta alle relazioni

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{Bg}}{\overline{AB}}, \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{hC}}{\overline{AC}}.$$

Si ottiene quindi

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{Bg}, \quad \overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{hC}.$$

Sommando le due eguaglianze si ottiene la relazione iniziale.

Generalizzazione a tutte le figure simili

Il Teorema di Pitagora continua a valere quando su ogni lato di un triangolo rettangolo si costruiscono figure simili tra loro anche non regolari. Il suo enunciato diventa:

In ogni triangolo rettangolo, l'area di un qualunque poligono, anche curvilineo, costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma delle aree dei poligoni, simili a quello costruito sull'ipotenusa, costruiti sui cateti.

Dimostrazione

Siano:

a e b i cateti
c l'ipotenusa
A_1 l'area del poligono costruito su a
A_2 l'area del poligono costruito su b
A_3 l'area del poligono costruito su c.

e

$k = a/b$ il rapporto tra i cateti
$h = c/b$ il rapporto tra l'ipotenusa e il cateto b.

Per il teorema di Pitagora in forma classica risulta:

$$c^2 = a^2 + b^2 = k^2 b^2 + b^2 = b^2(1 + k^2),$$

e quindi

$$c^2/b^2 = 1 + k^2.$$

Ricordando che se due poligoni simili hanno 2 lati corrispondenti in rapporto h allora le loro superfici sono in rapporto h^2, avendo definito $h = c/b$, risulta

$$A_3 = A_2 h^2 = A_2 c^2/b^2 = A_2(1 + k^2).$$

Avendo inoltre definito uguale a k il rapporto tra i due cateti, per il motivo precedente risulta uguale a k^2 il rapporto tra le aree dei poligoni simili costruiti su di essi, ovvero:

$$A_1 = k^2 A_2.$$

Quindi:

$$A_1 + A_2 = k^2 A_2 + A_2 = (1 + k^2)A_2.$$

E quindi

$$A_1 + A_2 = A_3.$$

Come volevasi dimostrare.

Negli spazi prehilbertiani

🔎 *Lo stesso argomento in dettaglio:* ***Spazio prehilbertiano****.*

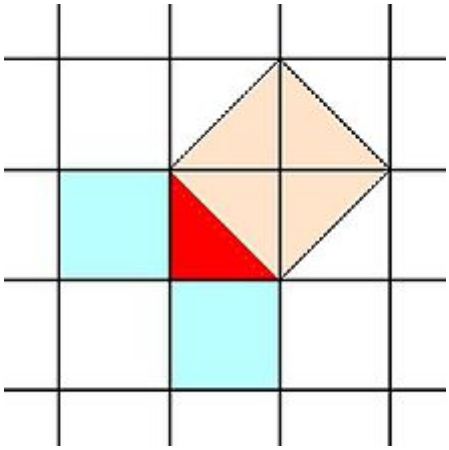
Il teorema di Pitagora può essere "generalizzato" a spazi vettoriali di qualsiasi dimensione, come lo spazio euclideo di dimensione 3 o superiore, o uno spazio vettoriale su corpo complesso, continuando a valere anche su funzioni viste come somme infinite di vettori come nell'analisi funzionale, finché sia possibile definire un prodotto scalare, rendendo lo spazio vettoriale uno spazio prehilbertiano.

La dimostrazione è semplice, e l'enunciato del teorema è: "La somma dei quadrati delle norme di due vettori ortogonali è uguale al quadrato della norma del loro vettore somma", ossia $v \perp u \Rightarrow \|v\|^2 + \|u\|^2 = \|v+u\|^2$.

Dimostrazione

Per definizione di ortogonalità, il prodotto scalare fra v e u è nullo e commuta. L'enunciato del teorema è equivalente, per la definizione di norma euclidea, a $\langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle = \langle u+v, u+v\rangle$. Infatti svolgendo il prodotto scalare al secondo membro, per bilinearità $\langle u+v,u+v\rangle = \langle u,u+v\rangle + \langle v,u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle$ ma $u \perp v$ quindi $\langle u,v\rangle = 0 = \langle v,u\rangle$ per definizione. Dunque il teorema risulta dimostrato.

Leggenda di Pitagora e delle piastrelle



Rappresentazione grafica del teorema.

Una leggenda racconta che Pitagora abbia formulato il suo teorema mentre stava aspettando un'udienza da Policrate. Seduto in un grande salone del palazzo di Samo, Pitagora si mise ad osservare le piastrelle quadrate del pavimento, si pensa che ne abbia vista una rotta perfettamente su una diagonale, così da formare due triangoli rettangoli uguali, ma oltre ad essere 2 triangoli rettangoli erano anche isosceli, avendo i due lati uguali. Pitagora immaginò un quadrato costruito sulla diagonale di rottura della piastrella, un quadrato avente come lati le diagonali delle piastrelle circostanti.

La dimostrazione è la seguente:

- l'area di ciascuna delle piastrelle adiacenti ai cateti era di: *2* mezze piastrelle (=*1* piastrella);
- la somma delle due aree era quindi di: *4* mezze piastrelle (=*2* piastrelle);
- l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa (diagonale della piastrella) era di: *4* mezze piastrelle.[8]

Dopo la conclusione, inoltre, si teorizza che Pitagora abbia fatto una ecatombe (ovvero una cerimonia sacrificale) con 100 buoi per ringraziare gli dei di averlo fatto giungere ad una risposta.

Significato esoterico del teorema

Il teorema di Pitagora, in realtà, non era considerato solo una legge matematica del pensiero, ma anche una legge ontologica, cioè dell'essere, riguardante la realtà dell'uomo e del mondo. Il significato filosofico ed esoterico che esso pertanto assumeva costituiva parte integrante delle conoscenze iniziatiche riservate agli adepti della scuola pitagorica.

Iscrizione grafica del teorema di Pitagora ad opera dei maestri costruttori sul portale della *Baugewerkeschule* («Scuola Edile») a Zittau, nel sud-est della Sassonia (Germania)

Una delle possibili interpretazioni del teorema che si è tramandata fino ad oggi all'interno della massoneria,[9] dove l'emblema dei quadrati costruiti sui lati di un triangolo rettangolo compare nel gioiello indossato dagli anziani Maestri ex-Venerabili (detti in inglese *Past Masters*),[10] mette in relazione la volontà del Cielo, ossia la Provvidenza, rappresentata dal cateto verticale, con la volontà della singola individualità umana, simboleggiata dal cateto orizzontale. Quanto più l'individuo, anziché estendere arbitrariamente la propria volontà, cerca di adeguarla a quella del Cielo, tanto meno subirà il peso del Destino, cioè dell'ipotenusa, e quindi tanto più riuscirà a dominare le forze della necessità che gravano sulla sua vita.[11]

> «L'equilibrio tra la Volontà e la Provvidenza da una parte, e il Destino dall'altra, era simboleggiato geometricamente dal triangolo rettangolo i cui lati sono proporzionali rispettivamente ai numeri 3, 4 e 5, triangolo al quale il Pitagorismo attribuiva una grande importanza, e che, per una coincidenza pure assai degna di nota, ne ha altrettanta nella tradizione estremo-orientale. Se la Provvidenza è rappresentata dal 3, la Volontà umana dal 4 e il Destino dal 5, in questo triangolo si ha: $3^2 + 4^2 = 5^2$; l'elevazione al quadrato dei numeri indica che ciò si riferisce al dominio delle forze universali, ossia propriamente al dominio animico, quello che corrisponde all'Uomo nel "macrocosmo", e al centro del quale, in quanto termine mediano, si situa la volontà nel "microcosmo".»
>
> (René Guénon, *La Grande Triade (http://www.rene-guenon.ch/Rene_Guenon/Ren%C3%A9%20Gu%C3%A9non%20-%201946%20-%20La%20Grande%20Triade.pdf)*, cap. XXI, Revue de la Table Ronde, Parigi/Nancy, 1946, trad. it. in "Lettera e Spirito. Rivista di studi tradizionali", n. 36)

Note

1. ^ Umberto Eco e Riccardo Fedriga (a cura di), *La filosofia e le sue storie - L'Antichità e il Medioevo*, Bari-Roma, Laterza, 2014, p. 30, ISBN 978-88-581-2831-2.
2. ^ Boyer, *Storia della matematica*, p. 20
3. ^ Alpay Özdural, *Omar Khayyam, Mathematicians, and "Conversazioni" with Artisans*, in *Journal of the Society of Architectural Historians*, vol. 54, n. 1, 1995, pp. 54–71, DOI:10.2307/991025. URL consultato il 18 gennaio 2022.
4. ^ (EN) Alpay Özdural, *Mathematics and Arts: Connections between Theory and Practice in the Medieval Islamic World*, in *Historia Mathematica*, vol. 27, n. 2, 1º maggio 2000, pp. 171–201, DOI:10.1006/hmat.1999.2274. URL consultato il 18 gennaio 2022.
5. ^ Volume s1-29, Appendix pp. 732-735. (https://plms.oxfordjournals.org/cgi/reprint/s1-29/1/706)
6. ^ Henry Perigal, *Geometric Dissections and Transpositions*. URL consultato il 18 gennaio 2022.
7. ^ Paolo Calicchio, *Teorema di Pitagora formula principale e formule inverse*, su *esercizimatematica.com*, 29 marzo 2018. URL consultato il 25 marzo 2021.

8. ^ *Pitagora osserva le piastrelle*, su *utenti.quipo.it*. URL consultato il 18 gennaio 2022.
9. ^ René Guénon, *Considerazioni sull'iniziazione*, cap. XIV, Parigi, 1946.
10. ^ Arturo Reghini, *Numeri sacri e geometria pitagorica*, Genova, Il Basilisco, 1931.
11. ^ *Interpretazione simbolica del teorema di Pitagora*, su *acam.it*.

Bibliografia

- Carl B. Boyer, *Storia della matematica*, Milano, Mondadori, 1990, ISBN 978-88-04-33431-6.
- Gino Loria, *Le scienze esatte nell'antica Grecia*, 2ª ed., Milano, 1914.

Voci correlate

- Geometria
- Aritmogeometria
- Numero
- Radice quadrata
- Trigonometria
- Ipotenusa
- Teorema del coseno
- Identità di Parseval

Altri progetti

- Wikiquote contiene citazioni di o su **teorema di Pitagora**
- Wikimedia Commons (https://commons.wikimedia.org/wiki/?uselang=it) contiene immagini o altri file su **teorema di Pitagora (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Pythagorean_theorem?uselang=it)**

Collegamenti esterni

-
- *Pitagora, teorema di*, in *Enciclopedia della Matematica*, Istituto dell'Enciclopedia Italiana, 2013.
- (EN) *Teorema di Pitagora*, su *Enciclopedia Britannica*, Encyclopædia Britannica, Inc.
- (EN) Eric W. Weisstein, *Teorema di Pitagora*, su *MathWorld*, Wolfram Research.
- (EN) *Teorema di Pitagora*, su *Encyclopaedia of Mathematics*, Springer e European Mathematical Society.
- (EN) *54 dimostrazioni del teorema di Pitagora*, su *faculty.umb.edu*.
- *Alcune animazioni grafiche di differenti dimostrazioni del teorema di Pitagora*, su *demonstrations.wolfram.com*.
- *Animazione della dimostrazione di Euclide*, su *walter-fendt.de*. URL consultato il 16 dicembre 2004 (archiviato dall'url originale il 4 dicembre 2004).

Controllo di autorità	Thesaurus BNCF 23251 (https://thes.bncf.firenze.sbn.it/termine.php?id=23251) · LCCN (EN) sh85109374 (http://id.loc.gov/authorities/subjects/sh85109374) · GND (DE) 4176546-1 (https://d-nb.info/gnd/4176546-1) · BNE (ES) XX4809534 (http://catalogo.bne.es/uhtbin/authoritybrowse.cgi?action=display&authority_id=XX4809534) (data) (http://datos.bne.es/resource/XX4809534) · BNF (FR) cb11946942j (https://c

	atalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb11946942j) (data) (https://data.bnf.fr/ark:/12148/cb11946942j) · J9U (EN, HE) 987007551078005171 (http://uli.nli.org.il/F/?func=find-b&local_base=NLX10&find_code=UID&request=987007551078005171) · NDL (EN, JA) 00934581 (https://id.ndl.go.jp/auth/ndlna/00934581)

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Teorema_di_Pitagora&oldid=133631029"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 22 mag 2023 alle 19:23.

Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.